7. Gravitační pole a pohyb těles v něm

Gravitační pole - existuje v okolí každého hmotného tělesa
- představuje formu hmoty
- zprostředkovává vzájemné silové působení mezi tělesy

Newtonův gravitační zákon: Dva hmotné body se navzájem přitahují stejně velkými gravitačními silami opačného směru. Velikost gravitační síly F_g je přímo úměrná součinu hmotností m_1,m_2 hmotných bodů a nepřímo úměrná druhé mocnině jejich vzdálenosti r (konstantou úměrnosti je gravitační konstanta $\kappa = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N.m^2.kg^{-2}$):

$$F_g = \kappa \cdot \frac{m_1 . m_2}{r^2}$$

Intenzita gravitačního pole – vektorová veličina sloužící k popisu gravitačního pole
- definovaná jako podíl gravitační síly F_g, která v daném místě pole působí na hmotný bod o hmotnosti m, a hmotnosti m tohoto bodu: $K = \frac{F_g}{m} = \kappa . \frac{M_Z}{r^2}$.
- Intenzita gravitačního pole je číselně rovna gravitační síle, působící na těleso jednotkové hmotnosti
- Gravitační zrychlení = zrychlení, které tělesům uděluje gravitační síla
- intenzita $\vec{K}$ gravitačního pole v jeho daném místě se rovná gravitačnímu zrychlení $\vec{a}_g$, které v tomto místě uděluje hmotnému bodu gravitační síla (pozn. srovnejte gravitační a tíhové zrychlení při povrchu Země)

Gravitační potenciál

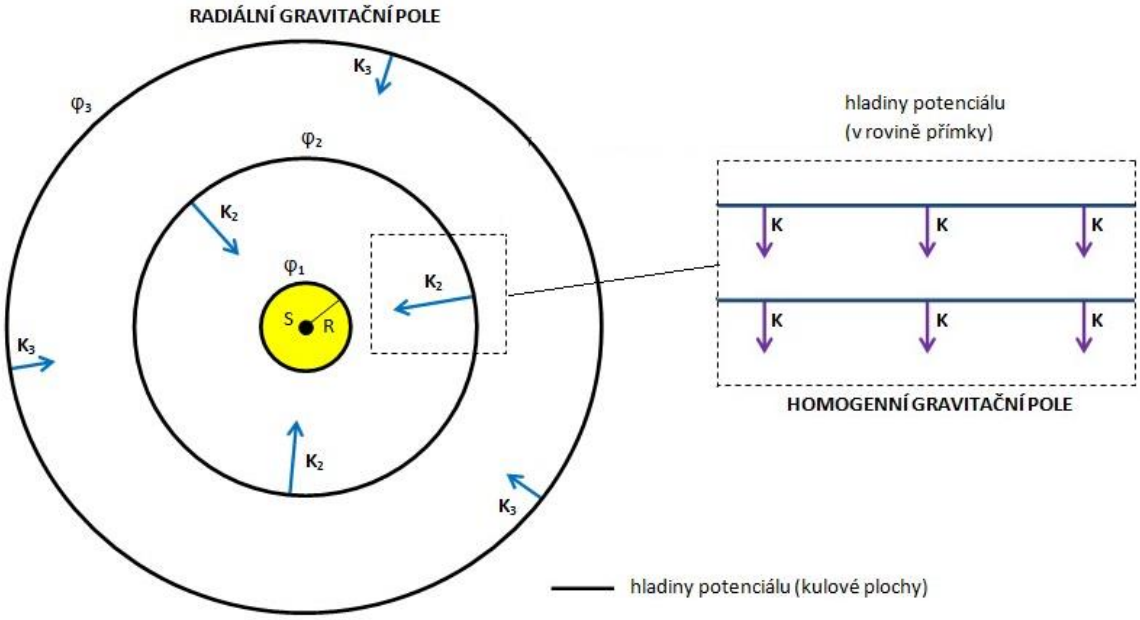
$$\varphi = \frac{E_p}{m}$$

- φ - gravitační potenciál v daném místě gravitačního pole
- E_p – potenciální energie tělesa o hmotnosti m v daném místě gravitačního pole

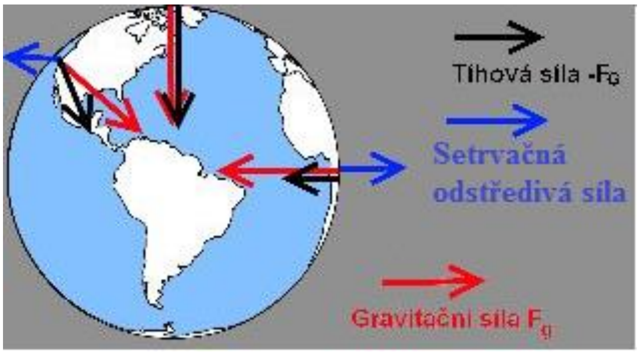
Gravitační potenciál v daném místě gravitačního pole je číselně roven potenciální energii, kterou by v tomto místě mělo těleso o hmotnosti 1 kg.
Potenciální energie je rovna práci, kterou je nutné vykonat, abychom těleso o hmotnosti m přenesli z nulové výšky do daného místa.
Ekvipotenciální plochy vzniknou spojením míst se stejným potenciálem.
V takových místech má vektor intenzity gravitačního pole (viz níže) stejnou velikost.

Grafické znázornění gravitačního pole
- vektorové pole, příp. siločárový model (siločára je myšlená čára, jejíž tečna v daném bodě určuje směr intenzity pole)
- skalární pole vytvořené pomocí ekvipotenciálních ploch (hladin potenciálu)

Druhy gravitačního pole:
- *radiální (centrální) pole* - druh gravitačního pole, při kterém směr gravitační síly ve všech místech pole míří stále do jednoho bodu, přičemž všechny body nacházející se na kulové ploše, která má střed v těžišti tělesa, mají intenzitu gravitačního pole o stejné velikosti (př. gravitační pole Země)
- *homogenní pole* - gravitační síla je ve všech místech pole stejná (velikost i směr), lze jej popisovat pomocí potenciální energie $E_p = m \cdot g \cdot h$ (př. zemský povrch)



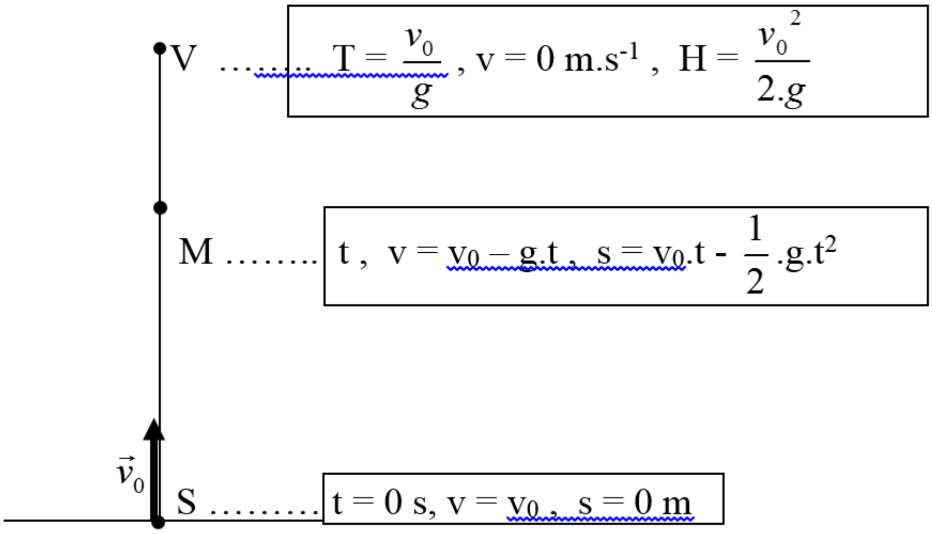
Tíhové pole:
Působiště gravitační síly je těžišti tělesa. Protože se Země otáčí okolo své osy, působí na všechna tělesa na Zemi také setrvačná odstředivá síla. Výslednici těchto sil nazýváme *tíhová síla* $F_G = m \cdot g$. Její směr i velikost určíme jednoduše siloměrem. To znamená, že síla, která na nás působí, není gravitační síla, ale složení gravitační a setrvačné odstředivé síly. Její velikost není na celé zemi stejná (mění se velikost setrvačné odstředivé síly).
Dalším pojmem je *tíha tělesa G*. Tíha je síla, kterou působí těleso na podložku nebo závěs.



<u>Pohyby těles v homogenním tíhovém poli Země</u>:
a) <u>jednoduchý</u> – volný pád
b) <u>složené (vrhy)</u>- z volného pádu a z rovnoměrného přímočarého pohybu ve směru vektoru počáteční rychlosti (svislý vrh vzhůru, vodorovný a šikmý vrh)

1) **vrh svislý vzhůru**

- složen z rovnoměrného pohybu směrem vzhůru a volného pádu



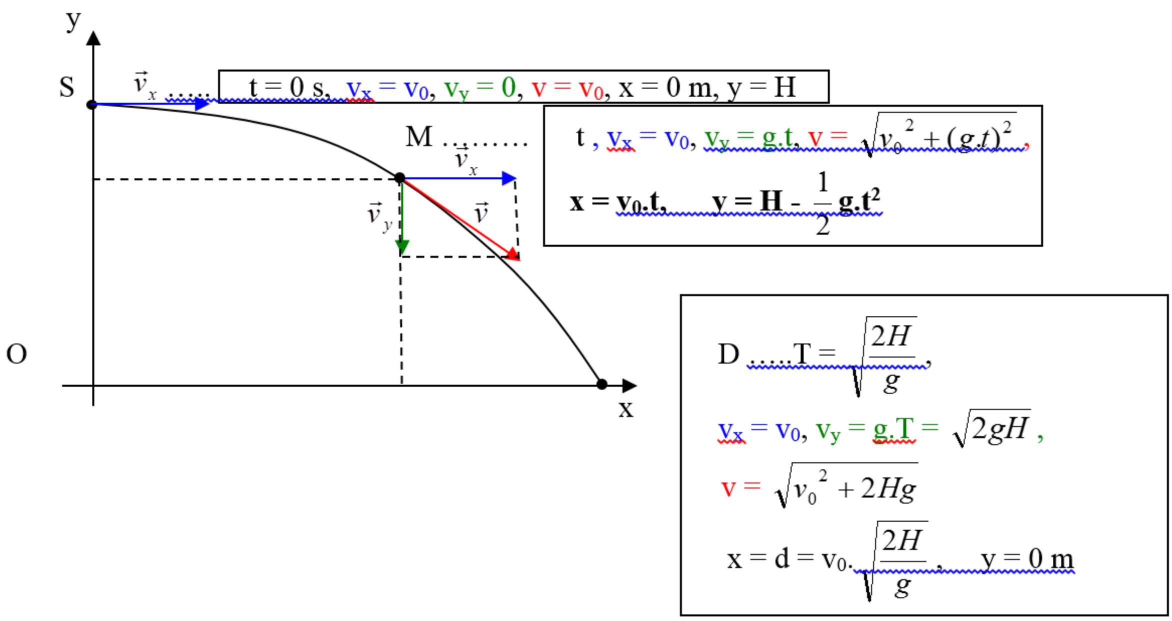
V …….. $T = \frac{v_0}{g}$, $v = 0\ m.s^{-1}$, $H = \frac{v_0^2}{2.g}$

M …….. t, $v = v_0 - g.t$, $s = v_0.t - \frac{1}{2}.g.t^2$

S ……… $t = 0\ s$, $v = v_0$, $s = 0\ m$

2) vrh vodorovný

- složen z rovnoměrného pohybu vodorovným směrem a volného pádu



S …… $t = 0\ s$, $v_x = v_0$, $v_y = 0$, $v = v_0$, $x = 0\ m$, $y = H$

M ……… t, $v_x = v_0$, $v_y = g.t$, $v = \sqrt{v_0^2 + (g.t)^2}$,

$x = v_0.t$, $y = H - \frac{1}{2}.g.t^2$

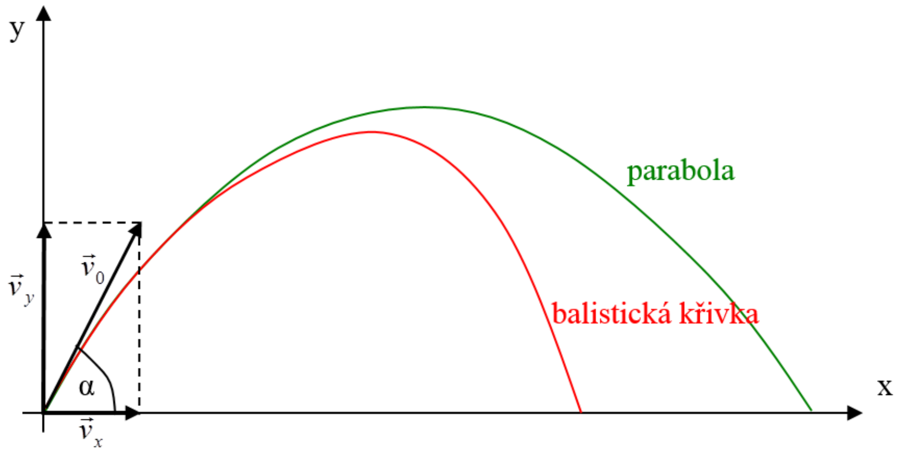
D ……$T = \sqrt{\frac{2H}{g}}$,

$v_x = v_0$, $v_y = g.T = \sqrt{2gH}$,

$v = \sqrt{v_0^2 + 2Hg}$

$x = d = v_0.\sqrt{\frac{2H}{g}}$, $y = 0\ m$

2) **vrh šikmý**
   - složen ze svislého vrhu a pohybu rovnoměrného ve vodorovném směru



Průměty rychlostí do směru os: $v_x = v_0.\cos\alpha$; $v_y = v_0.\sin\alpha$
Okamžitá rychlost je dána vektorovým součtem svislé a vodorovné rychlosti.

Okamžitá svislá rychlost v čase *t* se určí stejně jako u svislého vrhu vzhůru, vodorovná rychlost je stále stejná: $v_{xt} = v_0.\cos\alpha$; $v_{yt} = v_0.\sin\alpha - g.t$

Poloha tělesa v libovolném okamžiku: $x = v_x \cdot t = v_0 \cdot t \cdot \cos\alpha$

$$y = v_y \cdot t - \tfrac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = v_0 \cdot t \cdot \sin\alpha - \tfrac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Významná hodnota šikmého vrhu je **délka vrhu**, ve vojenské terminologii **dostřel**.

T_d – doba vrhu. Určí se z podmínky, že v nejvyšším bodě trajektorie je $v_y = 0$:

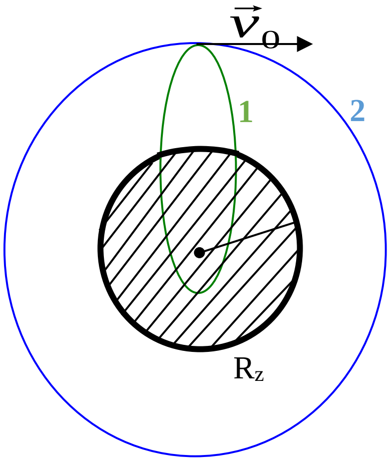
$$0 = v_0.\sin\alpha - g.\frac{T_d}{2} \longrightarrow T_d = \frac{2.v_0.\sin\alpha}{g}$$

Délka vrhu je pak:

$$D = v_x.T_d = v_0.T_d.\cos\alpha = \frac{2v_0^2.\sin\alpha.\cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2.\sin 2\alpha}{g}$$

Délka vrhu bude největší pro úhel 45°, stejná délka vrhu je pak pro dvojice α a 90° – α, tzn. např. pro 15° a 75° nebo 30° a 60°.

Pohyby těles v radiálním gravitačním poli Země:



U pohybů raket, družic nebo kosmických lodí se musí počítat s tím, že se pohybují už v radiálním poli.
Trajektorie družice závisí na její rychlosti:

1. Poměrně malá počáteční rychlost – těleso se pohybuje po *části elipsy, než narazí na povrch Země.*
   Část elipsy se zvětšuje s rychlostí tělesa.

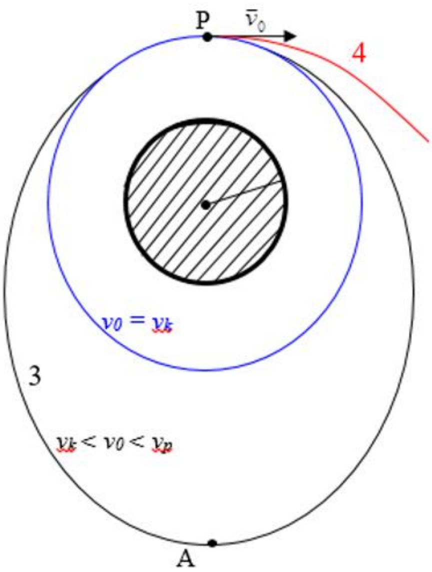
2. Při počáteční rychlosti v_k – **kruhová rychlost** – těleso opisuje kružnici se středem ve středu Země. Na toto těleso působí zemská gravitace $\boldsymbol{F_g}$, která plní úlohu síly dostředivé.

$$\mathbf{F_g = F_d}$$

$$\kappa\frac{M.m}{r^2} = m\frac{v_k^2}{r} \quad \rightarrow \quad v_k = \sqrt{\kappa\frac{M}{r}}$$

κ … gravitační konstanta, M … hmotnost středového tělesa (v tomto případě Země)
r … vzdálenost od středu Země (= poloměr + výška nad povrchem Země)

Při povrchu Země je v_k = **7,9 *km/s***, což je **první kosmická rychlost**.



3. Při rychlostech vyšších je trajektorie opět *eliptická*. Rovina elipsy prochází středem Země, v němž leží jedno její ohnisko. Bod P, v kterém má těleso nejmenší vzdálenost od Země, se nazývá **perigeum**, bod A, v kterém má těleso vzdálenost největší, **apogeum.** S rostoucí rychlostí je elipsa protáhlejší.
4. Při počáteční rychlosti o velikosti

   $$\boxed{v_p = v_k \cdot \sqrt{2}}$$

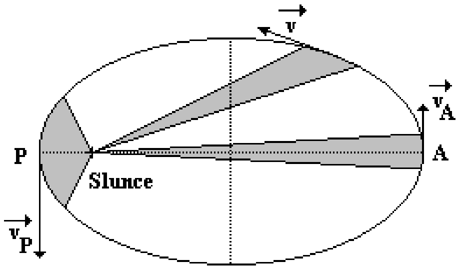
   se eliptická trajektorie mění na *parabolu a těleso se vzdaluje od Země*. Rychlost v_p se nazývá **parabolická, úniková**. Pro uvedenou v_k = 7,9 $km \cdot s^{-1}$ je $\mathbf{v_p}$ **= 11,2 *km/s***, což je **druhá kosmická rychlost**.

5. Než těleso dosáhne další, **třetí kosmické rychlosti** $\mathbf{v_3 = 42}$ ***km.s⁻¹*** (s využitím pohybu Země v_3 = 16,7 $km.s^{-1}$), pohybuje se stále v gravitačním poli Slunce. Při dosažení třetí kosmické rychlosti *opouští Sluneční soustavu*.

Pohyby planet okolo Slunce se řídí Keplerovými zákony.

Keplerovy zákony:
1. **<u>Zákon oběžných drah</u>** (popisuje tvar trajektorie planet):
Planety obíhají kolem Slunce po elipsách málo se lišících od kružnic, jejichž společným ohniskem je Slunce. Vrchol elipsy P, v němž je planeta Slunci nejblíže, se nazývá **<u>perihélium</u> (příslunní),** vrchol A, v němž je planeta od Slunce nejdále, **<u>afélium</u> (odslunní).**

2. **<u>Zákon plošných rychlostí</u>** (vysvětluje, jak se planety pohybují):
Plochy opsané průvodičem planety za jednotku času jsou konstantní.



Průvodič je úsečka, která spojuje střed planety se středem Slunce. Důsledek tohoto zákona je, že planety se v perihéliu pohybují rychleji než v aféliu.

3. **<u>Zákon oběžných dob</u>** (uvádí vztah mezi oběžnými dobami planet a hlavními poloosami jejich trajektorií):

Poměr druhých mocnin oběžných dob planet je roven poměru třetích mocnin jejich hlavních poloos.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

Uvažujeme-li, že se planety pohybují po elipsách málo odlišných od kružnic, lze místo poloos dosadit střední vzdálenost od Slunce a vztah přibližně odpovídá.

Keplerovy zákony neplatí pouze pro planety ve sluneční soustavě, ale i pro tělesa obíhající okolo Země (Měsíc, satelity,…).