5. Mechanika tuhého tělesa

Rozměry a tvar tělesa jsou často při řešení mechanických problémů rozhodující a podstatně ovlivňují pohybové účinky sil, které na ně působí. Taková tělesa samozřejmě nelze nahradit hmotným bodem.

Účinky sil na těleso: a) deformační (statické)
b) pohybové (dynamické)

<u>Tuhé těleso</u> – ideální těleso, na které mají působící síly pouze pohybové účinky, nikoliv účinky deformační.

Poznámka: V této otázce budeme mít pod pojmem „těleso" vždy na mysli „tuhé těleso".

Rozdělení mechanických pohybů těles:

1) **posuvný pohyb** – všechny body tělesa opisují stejné trajektorie, v daném okamžiku stejnou okamžitou rychlost i zrychlení.
2) **otáčivý pohyb** kolem nehybné osy – všechny body tělesa opisují soustředné kružnice se středem na ose rotace, v daném okamžiku mají stejnou úhlovou rychlost, velikost jejich obvodové rychlosti i velikost zrychlení roste s poloměrem jejich trajektorie.

Poznámka 1: Smysl otáčení tělesa proti směru hodinových ručiček označujeme za kladný, ve směru hodinových ručiček za záporný.

Poznámka 2: Většina pohybů těles v přírodě je složitějších, např. pohyb padajícího listu, ale i takové pohyby lze složit z dílčích posuvných a otáčivých pohybů.

Poznámka 3: Kinematický popis posuvných pohybů tělesa je stejný jako popis pohybů hmotného bodu, které již byly rozebrány ve 2. maturitní otázce. Proto se v této otázce zaměříme na rozbor otáčivých účinků sil.

<u>Otáčivý účinek síly na těleso</u> záleží na
a) velikosti síly
b) směru síly
c) poloze působiště síly vzhledem k ose rotace.

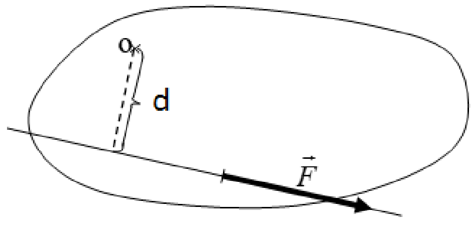
Všechny tři aspekty zohledňuje vektorová fyzikální veličina

<u>moment síly vzhledem k ose otáčení $\vec{M}$:</u>

1) **Velikost momentu síly** … $M = F \cdot d$, $[M] = N \cdot m$

F … velikost působící síly

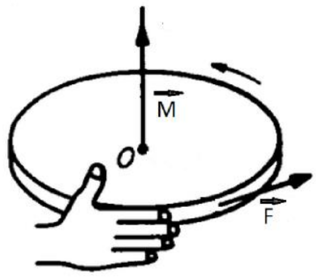
d … rameno síly F – je rovno vzdálenosti vektorové přímky síly od osy otáčení, jak je patrné z obrázku



Poznámka 1: Pozor!!! Často studenti považují za rameno síly délku úsečky, která spojuje bod O s působištěm síly $\vec{F}$, což obecně neplatí!!!

Poznámka 2: Přímka proložená vektorem síly $\vec{F}$ se nazývá **vektorová přímka síly** $\vec{F}$. Z obrázku a ze vztahu M = F · d je zřejmé, že při přemístění působiště síly $\vec{F}$ do jakéhokoliv jiného bodu tělesa na vektorové přímce síly $\vec{F}$ se její otáčivý účinek nezmění.

2) **Směr momentu síly** – určíme pomocí pravidla pravé ruky (PPR)
PPR – pravou ruku přiložíme dlaní k tělesu tak, aby ohnuté prsty ukazovaly smysl otáčení tělesa. Odchýlený palec ukazuje směr momentu síly.



Působí-li na těleso více sil, rozhoduje o smyslu otáčení tělesa výsledný moment síly vzhledem k ose otáčení, který je vektorovým součtem dílčích momentů sil.

Při řešení příkladů je užitečná tzv. **<u>momentová věta</u>**:
Otáčivý účinek sil působících na tuhé těleso se ruší, je-li vektorový součet jejich momentů vzhledem k téže ose nulový: $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \ldots + \vec{M}_n = \vec{0}$

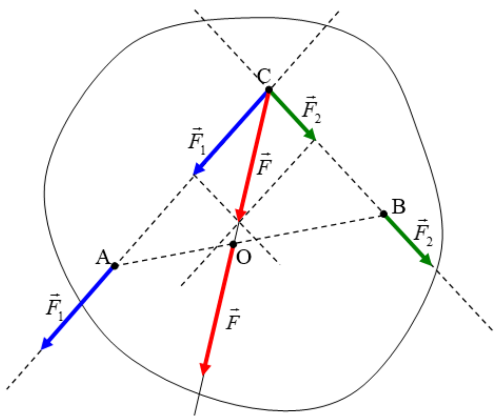
Poznámka: Momentová věta je analogická zákonu setrvačnosti pro posuvný pohyb, pro ji lze interpretovat také následovně: **Je-li výsledný moment sil působících na tuhé těleso vzhledem k ose otáčení nulový, setrvává těleso v původním otáčivém stavu.** Takže pokud bylo těleso v klidu, tak v klidu setrvá a pokud se otáčelo, tak setrvá v otáčení v nezměněné podobě.

Skládání sil působících na tuhé těleso

- Znamená nahrazení těchto dílčích sil silou jedinou, tzv. **výslednicí**, která má na těleso vzhledem k libovolně zvolené ose otáčení stejné pohybové účinky jako dílčí síly. Výslednice sil je určena směrem, velikostí a polohou působiště. Skládat síly lze graficky i početně.

Poznámka: Tuhé těleso je nedeformovatelné, takže každou ze sil, které na ně působí, lze libovolně posunout po její vektorové přímce.

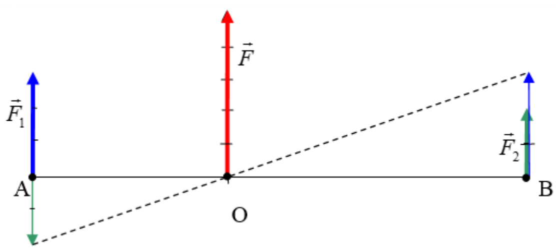
<u>Skládání sil **F_1**, **F_2** působících na těleso</u> : $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$



1) **dvě různoběžné síly**
Obě síly nejdříve přeneseme do společného bodu, kterým je průsečík jejich vektorových přímek, pak síly složíme doplněním na vektorový rovnoběžník a výslednou sílu $\vec{F}$ můžeme umístit do libovolného bodu její vektorové přímky síly, např. do bodu O, jak je tomu na obrázku.

2) **dvě rovnoběžné síly stejného směru**
   - grafické řešení:

Při grafickém řešení zaměníme působiště obou sil a u jedné z nich změníme orientaci. Působiště výslednice je průsečíkem úsečky AB se spojnicí koncových bodů přenesených sil. Výslednice sil má stejný směr jako dílčí síly a její velikost je dána součtem velikostí dílčích sil.

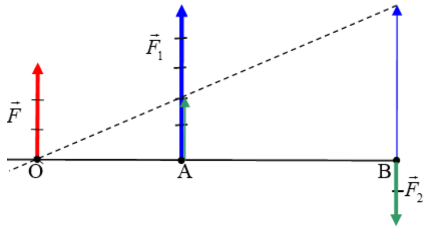


   - Početní řešení: pro síly platí: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, $F = F_1 + F_2$
     pro momenty sil platí: $\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{0}$, $M_1 = M_2$, $F_1 \cdot |AO| = F_2 \cdot |BO|$

3) dvě rovnoběžné síly opačného směru

- grafické řešení

Grafické řešení je stejné jako u skládání sil téhož směru, směr výslednice je stejný jako směr větší z obou sil a její velikost je dána rozdílem velikostí dílčích sil.



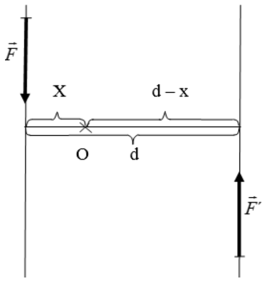
- Početní řešení: pro síly platí: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, F = F_1 - F_2

pro momenty sil platí: $\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{0}$, $M_1 = M_2$, $F_1.|AO| = F_2.|BO|$

Speciálním případem dvou opačně orientovaných sil působících na těleso je tzv. **dvojice sil**. Jde o dvě stejně velké síly opačného směru neležící v jedné přímce. Dvojici sil nelze složit. Jejich účinek nelze nahradit účinkem jedné výsledné síly. Dvojice sil má na těleso vždy otáčivý účinek.

Velikost momentu dvojice sil se vždy rovná součinu jedné síly *F* a ramene dvojice sil *d:*

M = F · d Ramenem dvojice sil d nazýváme kolmou vzdálenost vektorových přímek obou sil.



Odvození vztahu pro moment dvojice sil pro osu otáčení mezi vektorovými přímkami sil: $M_1 = F.x$

$M_2 = F'.(d - x) = F.(d - x)$

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$$

$M = M_1 + M_2 = F.x + F.(d - x) = F.x + F.d - F.x = F.d$

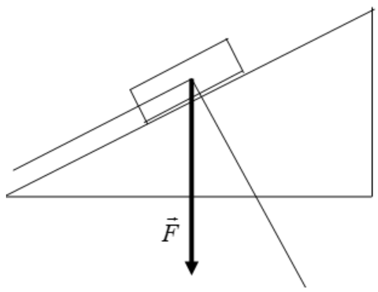
Užitím PPR zjistíme, že moment dvojice sil na obrázku míří ven z papíru směrem k nám, což značíme symbolem $\odot$. Směr do papíru značíme $\otimes$.

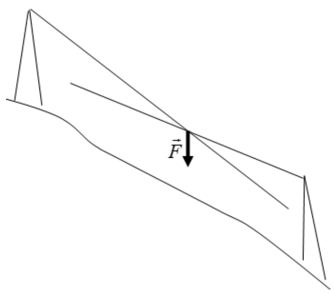
Poznámka: Při důkazu pro osu otáčení umístěnou vlevo či vpravo od vektorových přímek sil postupujeme stejně jako v uvedeném odvození. Šikovný student odvození určitě v rámci přípravy nevynechá.

Rozklad síly na složky

- Znamená nahrazení jedné síly dvěma dílčími silami, které mají na těleso stejný pohybový účinek jako daná síla. V podstatě jde o opačný postup než je skládání sil, používaný způsob řešení je obdobný. Obvykle se setkáme s příklady dvojího typu:

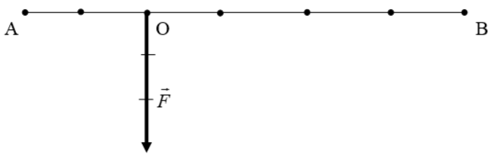
1. Rozklad síly na dvě různoběžné složky daných směrů:





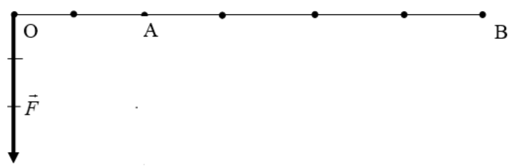
V obou zobrazených příkladech určíme velikosti dílčích sil doplněním obrázku na rovnoběžník. Při početním řešení je nutné zadat velikost síly F a velikosti úhlů, které svírají se silou F hledané dílčí síly a potom vypočítat velikost dílčích sil užitím trigonometrických vzorců – sinová věta, kosinová věta,….). Při grafickém řešení změříme délky vektorů dílčích sil.

2. Rozklad síly na dvě rovnoběžné složky téhož směru:



Známe: F, |OA|, |OB|
Vypočítáme: F_1, F_2
Použijeme: $F = F_1 + F_2$
$F_1 \cdot |OA| = F_2 \cdot |OB|$

3. Rozklad síly na dvě rovnoběžné složky opačného směru:



Známe: F, |OA|, |OB|
Vypočítáme: F_1, F_2
Použijeme: $F = F_1 - F_2$
$F_1 \cdot |OA| = F_2 \cdot |OB|$

Poznámka: V obou případech jde o opačný postup ke skládání sil, který využívá stejné fyzikální vztahy.

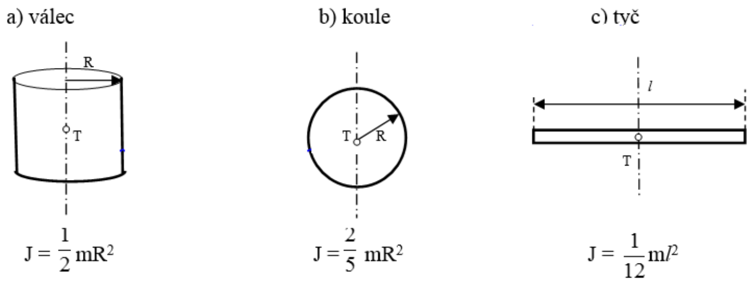
Kinetická energie rotujícího tělesa

$E_k = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2$, kde ω je úhlová rychlost a J je moment setrvačnosti, což je skalární veličina, která vyjadřuje rozložení hmotnosti jednotlivých částic v tělese vzhledem k ose rotace.

Poznámka 1: Výpočet momentu setrvačnosti je matematicky náročný. Obecně je definován pro těleso o hmotnosti m, které se skládá z n částic o hmotnostech m_1, m_2, …, m_n, vztahem:

$J = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \ldots + m_nr_n^2 = \sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2$ …m_k je hmotnost k-té částice, r_k je její vzdálenost od osy otáčení, přičemž platí: $m_1 + m_2 + \ldots + m_n = m$

Poznámka 2: Momenty setrvačnosti některých pravidelných těles jsou uvedeny v MFCHT. Zde uvedeme tři často užívané případy:



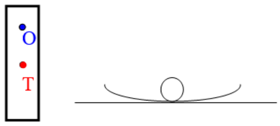
Poznámka 3: **Setrvačníky** jsou tělesa, u kterých je látka rozložena symetricky a daleko od osy rotace. Mají velký moment setrvačnosti a při rotaci velkou kinetickou energii. Osa roztočeného setrvačníku zachovává v prostoru stálý směr – užití ke stabilizaci lodí, kompasů, zatáčkoměrů v letadlech, …

Libovolný pohyb tuhého tělesa si můžeme představit složený z posuvného pohybu a z otáčivého pohybu kolem osy, procházející těžištěm tělesa. Kinetická energie tělesa je pak dána součtem energie posuvného pohybu a energie otáčivého pohybu kolem osy jdoucí těžištěm: $E_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$

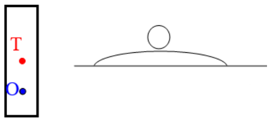
Těžiště tělesa je působištěm tíhové síly, kterou působí na těleso Země. Poloha těžiště tělesa má vliv na jeho stabilitu. Těleso se může nacházet ve 3 různých **rovnovážných polohách**. **Rovnovážná poloha tělesa**: aby bylo těleso v rovnovážné poloze, musí být v klidu a pohybové účinky všech sil působících na těleso (posuvné i otáčivé) se musí navzájem rušit.

To nastane, je-li nulová výslednice sil působících na těleso a je-li nulový také výsledný moment sil vzhledem k ose otáčení.

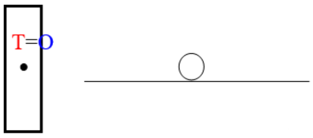
Druhy rovnovážných poloh tělesa



a) stálá (stabilní) … T je nejníže, E_p je minimální, při vychýlení tělesa z této polohy jeho E_p roste a těleso se samovolně vrací zpět.



b) vratká (labilní) …T je nejvýše, E_p je maximální, při vychýlení tělesa z této polohy jeho E_p klesá a těleso se samovolně překlápí do rovnovážné polohy stálé.



c) volná (indiferentní) … O prochází T, při vychýlení tělesa z této polohy se jeho E_p nemění.

Poznámka 1: T označuje polohu těžiště tělesa, O polohu osy otáčení a Ep hodnotu polohové energie tělesa.

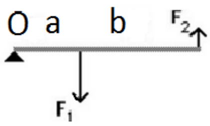
Poznámka 2: **Stabilita tělesa** je dána velikostí práce, kterou musíme vykonat, abychom podepřené těleso přemístili z rovnovážné polohy stálé do rovnovážné polohy vratké.

Jednoduché stroje jsou zařízení, která přenášejí sílu a mechanický pohyb z jednoho tělesa na jiné těleso. Usnadňují konání mechanické práce (ale práci, kterou je nutno vykonat nezmenší!) tím, že umožňují měnit velikost a směr působící síly.

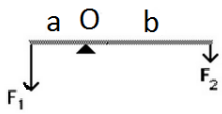
Obecně platí: Kolikrát se zmenší síla, kterou zvedáme břemeno pomocí jednoduchého stroje oproti síle, kterou bychom museli působit bez jeho použití, tolikrát se prodlouží dráha, po které menší silou působíme. Mechanická práce, kterou v obou případech vykonáme, zůstane stejná a to ještě při zanedbání odporových sil.

Rozdělení jednoduchých strojů:

1) jednoduché stroje založené na rovnováze momentů sil:
   a) páka
      jednozvratná:

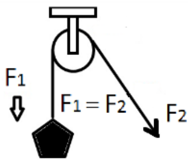


dvojzvratná:

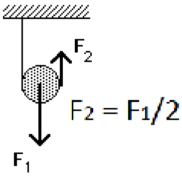


Poznámka: Pro obě páky na obrázcích platí: $F_1 \cdot a = F_2 \cdot b$

   b) kladka
      pevná

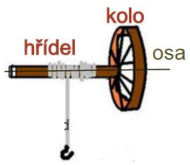


volná



Poznámka: Kladka pevná sice nemění velikost síly, kterou musíme při zvedání břemene působit, ale ulehčuje nám práci tím, že umožňuje měnit směr naší síly. Kladka volná zmenšuje sílu, kterou musíme působit na polovinu tíhy břemene.

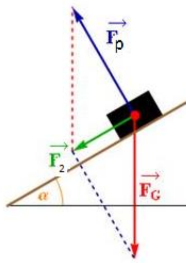
   c) kolo na hřídeli

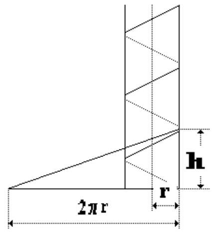


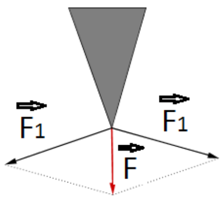
Poznámka: Při zvedání břemene pomocí kola na hřídeli platí: $F_1 \cdot r_1 = F_2 \cdot r_2$, přičemž r_1 značí poloměr hřídele, r_2 poloměr kola, F_1 tíhu břemene, F_2 naši sílu.

2) jednoduché stroje založené na rovnováze sil

a) nakloněná rovina b) šroub c) klín



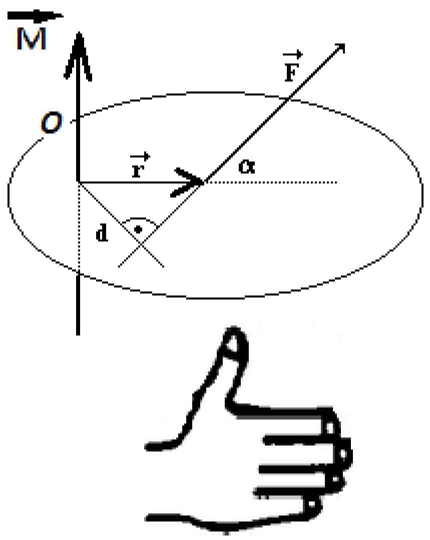




Poznámka 1: Zanedbáme-li tření při zvedání břemene pomocí nakloněné roviny, stačí překonávat pouze sílu $F_2 = F_G \cdot \sin\alpha$, jak je patrné z obrázku, která je výslednicí síly tíhové a síly podložky. Adekvátně se prodlouží dráha, po níž budeme při zvedání břemeno posunovat.

Poznámka 2: Šroub je v podstatě nakloněná rovina navinutá na válcové ploše. Při šroubování platí: $F_1 \cdot 2\pi r = F_2 \cdot h$, kde r značí poloměr šroubu, h stoupání závitu, F_1 utahovací sílu šroubu, F_2 naši sílu.

Poznámka 3: U klínu se využívá rozklad naší síly o velikosti F na dvě složky, kolmé ke stěnám klínu, o stejných velikostech F_1. Čím je klín ostřejší, tím jsou boční síly větší, jak je opět patrno z obrázku.



Poznámka 4: **Zpřesnění pojmu moment síly**.

S přihlédnutím ke znalostem z analytické geometrie lze moment síly definovat pomocí vektorového součinu:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

V uvedené vektorové rovnici je v souladu s definicí vektorového součinu obsažena informace nejen o velikosti momentu síly, ale také o jeho směru. Směr momentu síly určíme užitím pravidla pravé ruky a velikost vypočítáme užitím vzorce:

$M = r \cdot F \cdot \sin\alpha = F \cdot d$