

STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST

Obor č. 2: Fyzika

Stojaté a postupné vlny na struně

**Anežka Klangová
Jihomoravský kraj**

Brno 2025

STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST

Obor č. 2: Fyzika

Stojaté a postupné vlny na struně

Standing and traveling waves on a string

Autor: Anežka Klangová

Škola: Gymnázium Brno, Křenová, příspěvková organizace,
Křenová 304/36, 602 00 Brno

Kraj: Jihomoravský kraj

Konzultant: Prof. Mgr. Tomáš Tyc, Ph.D.

Brno 2025

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou práci SOČ vypracovala samostatně a použila jsem pouze prameny a literaturu uvedené v seznamu bibliografických záznamů.

Prohlašuji, že tištěná verze a elektronická verze soutěžní práce SOČ jsou shodné.

Nemám závažný důvod proti zpřístupňování této práce v souladu se zákonem č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších předpisů.

Brno 16. ledna 2025

Anežka Klangová

Poděkování

Na tomto místě bych chtěla poděkovat panu profesoru Mgr. Tomáši Tycovi, Ph.D. za možnost konzultací, za odborné vedení mé práce a trpělivost při jejím vytváření.

Anotace

Ve své práci SOČ jsem se zabývala závislostí barvy zvuku na vzdálenosti místa počátečního rozkmitu na struně od pevného konce. Nejprve jsem tento problém zpracovala teoreticky a následně, s využitím kytary, prakticky. Z výpočtu vyplývá, že barva tónu je na místě rozkmitu závislá. Tento fakt se mi podařilo ověřit experimentálně. Nejchudší spektrum barvy tónu je při rozkmitu v polovině, kdy jsou všechny sudé násobky základní frekvence potlačené. V případě rozkmitu v místě zlatého řezu naopak k výraznému potlačení žádné vyšší harmonické frekvence nedochází, a tedy nabízí bohatší barvu tónu.

Klíčová slova

Vlnění; vyšší harmonické frekvence; barva tónu

Annotation

In my work for the SOČ (Student Scientific Research), I focused on the relationship between the color of sound (timbre) and the distance of the initial vibration point on the string from the fixed end. First, I addressed this problem theoretically and then practically, using a guitar. The calculation shows that the timbre depends on the location of the initial vibration point. I was able to verify this fact experimentally. The poorest spectrum of the tone occurs when the vibration starts in the middle, where all even multiples of the fundamental frequency are suppressed. On the other hand, in the case of vibration at the point given by the golden ratio, there was no significant suppression of any higher harmonic frequencies.

Keywords

Waves, harmonic series, timbre

Obsah

1. Úvod.....	6
2. Teoretická část.....	7
2.1. Vlnění, stojaté a postupné vlnění.....	7
2.2. Teorie vlnění.....	7
2.3. Trojúhelníkový kmit.....	9
2.3.1. Nalezení hodnot A_n	9
2.4. Příklady pro konkrétní body rozkmitu.....	10
2.4.1. Řešení pro rovnoramenný trojúhelník.....	10
2.4.2. Obecné řešení pro nerovnoramenný trojúhelník.....	12
2.4.3. Rozkmitání ve třetině.....	13
2.4.4. Rozkmitání ve čtvrtině.....	14
2.4.5. Zlatý řez.....	16
2.5. Hladina hlasitosti zvuku.....	18
3. Praktická část.....	19
3.1. Experimentální zařízení.....	19
3.2. Vlastní měření.....	19
3.2.1. Měření v polovině struny.....	19
3.2.2. Měření ve třetině struny.....	20
3.2.3. Měření ve čtvrtině struny.....	20
3.2.4. Měření v místě zlatého řezu.....	21
3.2.5. Porovnání naměřených spekter.....	21
3.3. Numerické výsledky experimentu.....	22
4. Porovnání měření s výpočtem.....	23
4.1. Rozkmit v polovině.....	23
4.2. Rozkmit ve třetině.....	23
4.3. Rozkmit ve čtvrtině.....	24
4.4. Rozkmit ve zlatém řezu.....	24
5. Závěr.....	25
6. Použitá literatura.....	26
7. Seznam tabulek a obrázků.....	27

1. ÚVOD

Hudba je společensky velmi přínosná věc, která dokáže oslovit téměř každého člověka. Hudbu může tvořit člověk sám svým zpěvem nebo hrou na nástroj, ale když se spojí více lidí, dokáží vytvořit větší těleso s několika různými nástroji. Přestože všechny nástroje budou hrát ten stejný tón, každý z nich bude znít jinak. Můžeme tedy říct, že každý nástroj vydává tóny s jinou barvou.

Barvu tónu lze zkoumat fyzikálně. Z fyzikálního pohledu barva tónu je určena zastoupením vyšších harmonických frekvencí, tj. celočíselných násobků základní frekvence.

Zajímá mne, zda barva tónu u strunných nástrojů bude záležet na místě rozkmitu. Je totiž zajímavé, že ve většině případů nedochází k rozkmitu v polovině délky struny. Například na kytáře se na struny drnká přibližně ve čtvrtině, na housle se hraje skoro na konci struny. Na cimbál se hraje na krajích strun. U klavíru záleží na délce struny: u vyšších tónů (kratších strun) kladívka tlučou přibližně v polovině, u nižších tónů (delších strun) tlučou v blízkosti kraje struny.

Můžeme také najít rozdíl v barvě tónu mezi cembalem a klavírem. Cembalo je barokní hudební nástroj a hraní tónů funguje díky trsátkům, které strunu rozkmitají. U klavíru je mechanismus tvorby zvuku jiný. Spočívá v rozkmitání struny úderem kladívka do struny. Tyto odlišné způsoby rozkmitu mají za důsledek jinou barvu tónů u obou nástrojů.

V této práci budu zkoumat závislost barvy tónu na místě počátečního rozkmitu na struně. Pro experiment jsem zvolila měření na kytáře.

2. TEORETICKÁ ČÁST

V této části bude definována problematika pomocí teorie vlnění a bude proveden rozklad trojúhelníkové vlny do harmonických kmitů pomocí Fourierovy řady. Tento postup mi umožní určit zastoupení vyšších harmonických frekvencí, tedy barvu tónu.

2.1. Vlnění, stojaté a postupné vlnění

Vlnění je jev, při kterém dochází k šíření výchylky z rovnovážné polohy, tj. dynamického rozruchu, v médiu, které se nikam nepohybuje.

Periodická vlna osciluje opakovaně kolem rovnovážné polohy, ale její průměrná poloha se nemění. Je charakterizována frekvencí (převrácená hodnota periody, tj. času, za který každý element kmitajícího prostředí dokončí celý cyklus), vlnovou délkou (vzdálenost ve směru šíření mezi dvěma atomy, které oscilují ve fázi) a rychlostí. Když se vlna pohybuje jedním směrem, hovoříme o postupném vlnění; když se dvě vlny pohybují vzájemně opačnými směry, může docházet ke vzniku stojatého vlnění.

Stojaté vlnění je kombinace dvou vln, které se šíří v opačném směru a mají stejnou amplitudu a frekvenci. Tento jev je výsledkem jejich složení, když se vlny v některých místech zesílí a v jiných vyruší. Tzv. uzly jsou body, kde je amplituda nulová a tedy i výchylka v libovolném čase je nulová – dochází k destruktivnímu složení vln. Tyto uzly jsou od sebe vzdálené polovinu vlnové délky. Místa, kde je vlna dvojnásobná, se nazývají kmitny. Jsou od sebe opět vzdálené polovinu vlnové délky [1],[2].

Tento jev si můžeme demonstrovat na provazu, který přichytíme na jednom konci a rozkmitáme vertikálním pohybem ruky. Ve chvíli, kdy se vlna dostane k pevnému konci, odrazí se zpátky a složí se s původní vlnou.

Postupné vlnění je rozruch média, který se jím šíří v určitém směru a s určitou rychlostí. Dochází k posunutí částí tvořících médium pryč z rovnovážné polohy. Jednotlivé části média si navzájem předávají energii a vlna tak postupuje vpřed [3],[4].



2.2. Teorie vlnění

Pro vlnění platí tato rovnice [5]:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (1)$$

kde U je výchylka kmitu, t je čas, x je vzdálenost od začátku struny a c je rychlost vlny.

Rychlost vlny c souvisí se silou F napínající strunu a s její délkovou hustotou σ . Tento vztah lze vyjádřit vzorcem

$$c = \sqrt{\frac{F}{\sigma}} \quad (2)$$

Jedním z možných řešení rovnice (1) je závislost výchylky na čase a poloze ve tvaru

$$U(x, t) = A \cdot \sin(k \cdot x) \cos(\omega \cdot t - \varphi) \quad (3)$$

Zde φ je počáteční fáze a ω je úhlová frekvence, kterou vypočítáme

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f \quad (4)$$

kde f je frekvence.

Veličina k se nazývá vlnové číslo a souvisí s vlnovou délkou λ vztahem

$$k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \quad (5)$$

Že jde skutečně o řešení, ověříme přímým dosazením do rovnice (1).

Nadále budeme uvažovat strunu délky L s pevnými konci v bodech $x = 0$ a $x = L$. Musí vždy platit, že výchylka $U_n(x, t) = 0$ na koncích, tedy:

$$U_n(0, t) = 0 \quad (6)$$

$$U_n(L, t) = 0 \quad (7)$$

Funkce (3) to v bodě $x = 0$ splňuje automaticky. Aby tuto podmínku splňovala i v bodě $x = L$, musí platit $k \cdot L = n \cdot \pi$, odkud

$$k = \frac{n \cdot \pi}{L} \quad (8)$$

Vzorec (3) lze přepsat do tvaru:

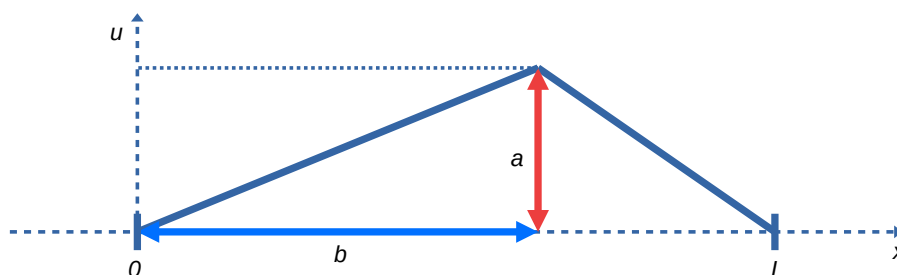
$$U_n = \sin \frac{n \cdot \pi \cdot x}{L} [A_n \cos(\omega_n \cdot t) + B_n \sin(\omega_n \cdot t)] \quad (9)$$

Díky tomu, že rovnice (1) je lineární, je jejím řešením také lineární kombinace:

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} U_n = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(\omega_n \cdot t) + B_n \sin(\omega_n \cdot t)] \sin \frac{n \cdot \pi \cdot x}{L} \quad (10)$$

U_n je výchylka kmitu o úhlové frekvenci ω_n , U je celková výchylka, n je index módu na struně (platí, že n je přirozené číslo), A_n je maximální výchylka kmitu o frekvenci ω_n .

2.3. Trojúhelníkový kmit



Obrázek 1: Náčrt trojúhelníkového kmitu

Abychom dosáhli trojúhelníkového kmitu, musíme strunu s pevnými konci vychýlit v jednom bodě $x = b$. Velikost této výchylky označíme a , viz obrázek 1. Následně strunu pustíme. Tím docílíme kmitání. Díky počátečnímu klidovému stavu struny je počáteční rychlost v každém bodě nulová. Z rovnice (10) můžeme rychlost vyjádřit jako

$$v(x, 0) = \dot{U}(x, 0) = \left. \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \omega_n \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot x}{L} \quad (11)$$

Z podmínky $v(x, 0) = 0$ pro všechna x pak plyne, že všechna B_n jsou nulová.

Dostáváme tedy vztah pro výchylku:

$$U_n = \sin \frac{n \cdot \pi \cdot x}{L} A_n \cos(\omega_n \cdot t) \quad (12)$$

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} U_n = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n \cdot t) \sin \frac{n \cdot \pi \cdot x}{L} \quad (13)$$

Nyní potřebujeme určit A_n , které bude záviset na počátečních podmínkách, tedy na tvaru struny v čase rozkmitu.

2.3.1. Nalezení hodnot A_n

Známe-li počáteční výchylku struny, můžeme určit konstanty A_n , které udávají zastoupení vyšších harmonických frekvencí. K tomu se bude hodit tento integrál:

$$I_{mn} = \int_0^L \sin \frac{n \cdot \pi \cdot x}{L} \cdot \sin \frac{m \cdot \pi \cdot x}{L} dx \quad (14)$$

jehož řešením je

$$\frac{L}{2} \text{ pro } m=n$$

$$0 \text{ pro } m \neq n$$

Můžeme tedy říct, že výsledek je závislý na vztahu m a n .

Dále s pomocí rovnice (13) pro $t = 0$ spočítáme

$$\begin{aligned} \int U(x, 0) \cdot \sin \frac{m \cdot \pi \cdot x}{L} dx &= \int \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot x}{L} \cdot \sin \frac{m \cdot \pi \cdot x}{L} dx = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int \sin \frac{n \cdot \pi \cdot x}{L} \cdot \sin \frac{m \cdot \pi \cdot x}{L} dx = \frac{L}{2} \cdot A_m \end{aligned} \quad (15)$$

Pro A_m tedy dostáváme

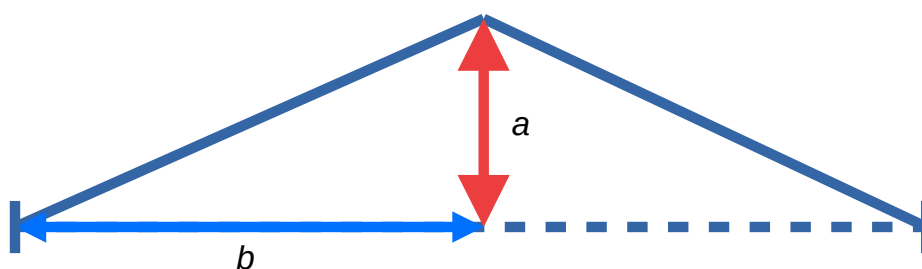
$$A_m = \frac{2}{L} \int_0^L U(x, 0) \cdot \sin \frac{m \cdot \pi \cdot x}{L} dx \quad (16)$$

Tato rovnice umožňuje určit hodnoty konstant A_n z počátečního tvaru struny.

2.4. Příklady pro konkrétní body rozkmitu

Pro účely praktické části si spočítáme řešení pro několik možných umístění bodu rozkmitu b .

2.4.1. Řešení pro rovnoramenný trojúhelník



Obrázek 2: Náčrt vychýlení struny v polovině tak, aby vznikl rovnoramenný trojúhelník

Nejprve budeme analyzovat situaci, kdy strunu rozkmitáme přesně v polovině, tedy bude platit $b = \frac{L}{2}$. Pro počáteční výchylku ve tvaru rovnoramenného trojúhelníku platí

$$U(x, 0) = \frac{2 \cdot a}{L} \left(\frac{L}{2} - \left| x - \frac{L}{2} \right| \right) \quad (17)$$

Pro účel integrace kvůli absolutní hodnotě ve vzorci rozdělíme funkci do dvou intervalů.

1. pro $x \leq \frac{L}{2}$

$$U(x, 0) = \frac{2 \cdot a}{L} \left(\frac{L}{2} + x - \frac{L}{2} \right) = \frac{2 \cdot a}{L} \cdot x \quad (18)$$

2. pro $x > \frac{L}{2}$

$$U(x, 0) = \frac{2 \cdot a}{L} \left(\frac{L}{2} - x + \frac{L}{2} \right) = \frac{2 \cdot a}{L} \cdot (L - x) \quad (19)$$

Potom tedy pro A_n po dosazení výrazů (18) a (19) do vzorce (17) bude platit

$$A_n = \frac{4 \cdot a}{L^2} \int_0^{\frac{L}{2}} x \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot x}{L} dx + \frac{4 \cdot a}{L^2} \int_{\frac{L}{2}}^L (L - x) \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot x}{L} dx \quad (20)$$

S využitím substituce $z = \frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}$ vypočítáme integrály. Výsledkem je

$$A_n = \frac{4 \cdot a}{n^2 \cdot \pi^2} \cdot \left[-z \cdot \cos z + \sin z \right]_0^{\frac{n \cdot \pi}{2}} \cdot (1 + (-1)^{n-1}) \quad (21)$$

kde díky poslednímu členu můžeme řešení rozdělit na

a) nulové: pro n sudé ($n=2p$) platí: $(1 + (-1)^{2p-1}) = (1 - 1) = 0 \Rightarrow A_{2p} = 0$

b) nenulové: pro n liché ($n=2p+1$) platí: $(1 + (-1)^{(2p+1)-1}) = (1 + 1) = 2$, po dosazení mezí $\Rightarrow$

$$A_n = 2 \cdot \frac{4 \cdot a}{n^2 \cdot \pi^2} \cdot \left[-\frac{n \cdot \pi}{2} \cdot \cos \frac{n \cdot \pi}{2} + \sin \frac{n \cdot \pi}{2} \right] \quad (22)$$

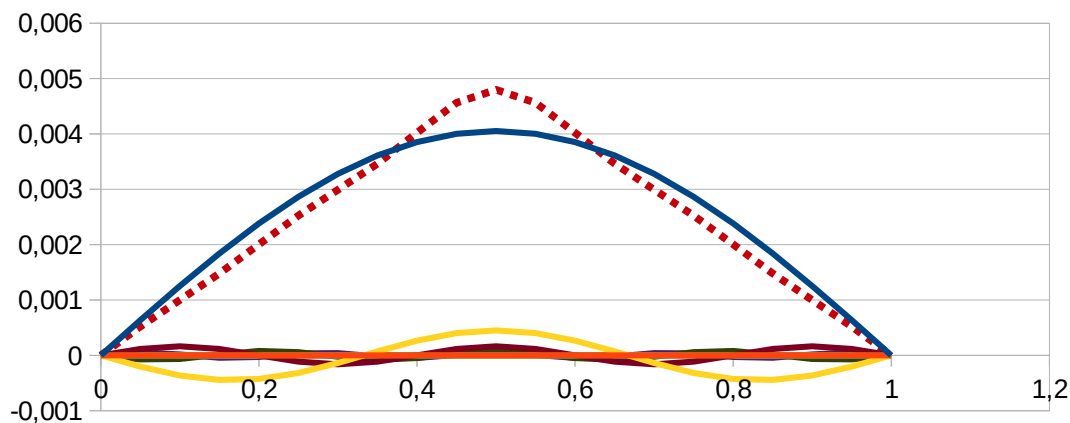
Vychází tedy, že všechny konstanty A_n pro sudé n budou nulové. V případě lichých módů závisí konstanty na funkcích sinus a kosinus s argumentem $\frac{n \cdot \pi}{2}$. Vzhledem k periodě

2π těchto funkcí můžeme výsledek dále zjednodušit na základě dělitelnosti n číslem 4. Výsledek můžeme shrnout do tabulky 1:

Tabulka 1: Konstanty A_n pro rozkmit v polovině

n modulo 4	$\cos \frac{n \cdot \pi}{2}$	$\sin \frac{n \cdot \pi}{2}$	$(1 + (-1)^{n-1})$	A_n
0	1	0	0	0
1	0	1	2	$\frac{8 \cdot a}{n^2 \cdot \pi^2}$
2	-1	0	0	0
3	0	-1	2	$-\frac{8 \cdot a}{n^2 \cdot \pi^2}$

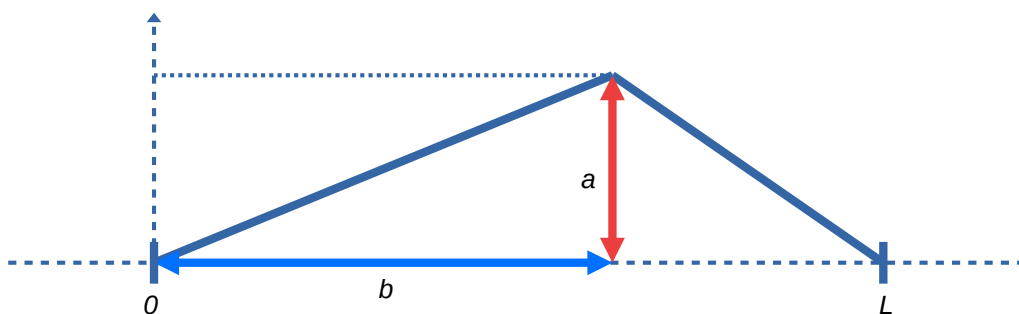
Můžeme se podívat, jak se módy skládají, aby vytvořily trojúhelníkový kmit. Na obrázku 3 je spočítán součet prvních deseti módů.



Obrázek 3: Prvních deset módů a jejich součet pro rozkmit v polovině

Přibližně to vystihuje trojúhelníkovou křivku, ale vlivem toho, že jsme pracovali jen s deseti členy (z nichž je polovina nulových), je v okolí hrotu křivka zaoblená.

2.4.2. Obecné řešení pro nerovnoramenný trojúhelník



Obrázek 4: Obecné schéma pro trojúhelníkový kmit

Pro počáteční tvar struny při rozkmitu v bodě vzdáleném b od pevného konce s výchylkou o velikosti a bude platit:

$$0 \leq x \leq b : U(x,0) = \frac{a}{b} \cdot x$$

$$b \leq x \leq L : U(x,0) = \frac{a}{L-b} \cdot (L-x)$$

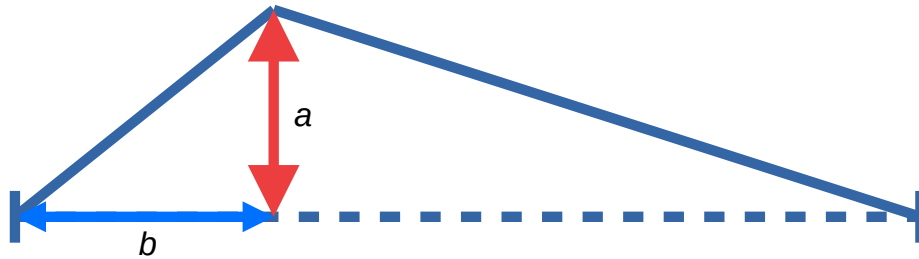
Obecně pak platí

$$A_n = \frac{2}{L} \cdot \frac{a}{b} \int_0^b x \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot x}{L} dx + \frac{2}{L} \cdot \frac{a}{L-b} \int_b^L (L-x) \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot x}{L} dx \quad (23)$$

Po vyřešení integrálů dostáváme obecný vztah pro konstanty A_n :

$$A_n = \frac{2 \cdot a \cdot L}{n^2 \cdot \pi^2} \cdot \left\{ \frac{1}{b} \cdot \left[\frac{-n \cdot \pi \cdot b}{L} \cdot \cos \frac{n \cdot \pi \cdot b}{L} + \sin \frac{n \cdot \pi \cdot b}{L} \right] + \right. \\ \left. + \frac{(-1)^{n-1}}{L-b} \cdot \left[\frac{-n \cdot \pi \cdot (L-b)}{L} \cdot \cos \frac{n \cdot \pi \cdot (L-b)}{L} + \sin \frac{n \cdot \pi \cdot (L-b)}{L} \right] \right\} \quad (24)$$

2.4.3. Rozkmitání ve třetině



Obrázek 5: Náčrt vychýlení ve třetině struny

V této kapitole se budu zabývat rozkmitáním struny v jedné třetině. Tedy pro $b = \frac{1}{3}L$ platí

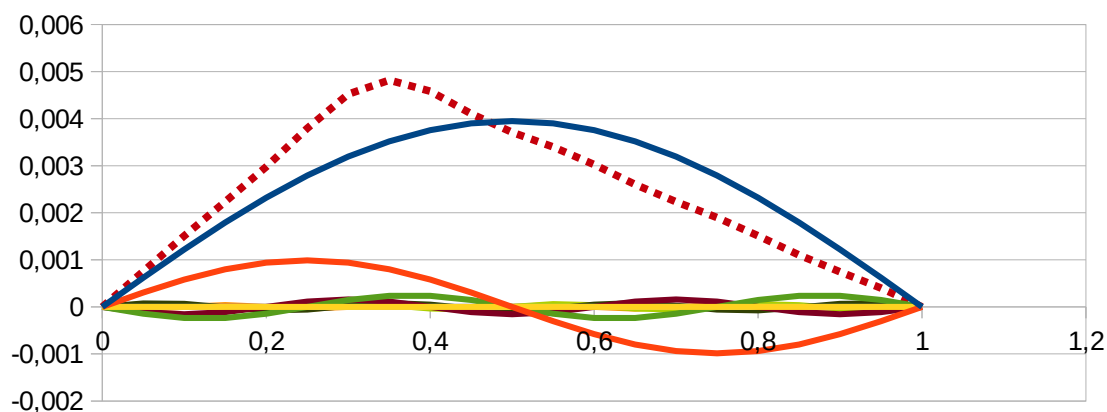
$$A_n = \frac{2 \cdot a \cdot L}{n^2 \cdot \pi^2} \cdot \left\{ \frac{3}{L} \cdot \left[\frac{-n \cdot \pi}{3} \cdot \cos \frac{n \cdot \pi}{3} + \sin \frac{n \cdot \pi}{3} \right] + \frac{3 \cdot (-1)^{n-1}}{2 \cdot L} \cdot \left[\frac{-2 \cdot n \cdot \pi}{3} \cdot \cos \frac{2 \cdot n \cdot \pi}{3} + \sin \frac{2 \cdot n \cdot \pi}{3} \right] \right\} \quad (25)$$

Obdobně jako v předchozí kapitole můžeme řešení rozdělit podle dělitelnosti n , ale tentokrát číslem 6:

Tabulka 2: Konstanty A_n pro rozkmit ve třetině

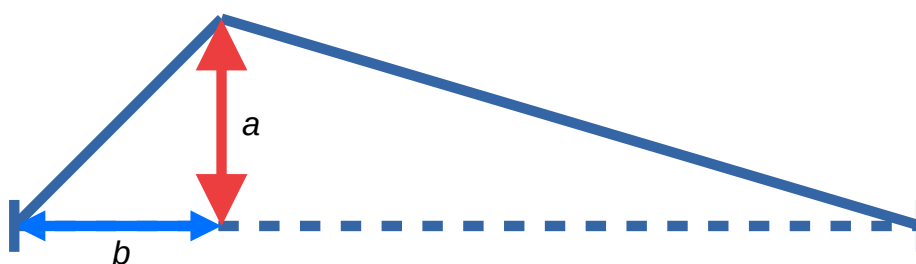
n modulo 6	$\cos \frac{n \cdot \pi}{3}$	$\sin \frac{n \cdot \pi}{3}$	$\cos \frac{2 \cdot n \cdot \pi}{3}$	$\sin \frac{2 \cdot n \cdot \pi}{3}$	A_n
0	1	0	1	0	0
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{9 \cdot a \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot n^2 \cdot \pi^2}$
2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{9 \cdot a \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot n^2 \cdot \pi^2}$
3	-1	0	1	0	0
4	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{9 \cdot a \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot n^2 \cdot \pi^2}$
5	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{9 \cdot a \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot n^2 \cdot \pi^2}$

I nyní nám vychází zastoupení některých módů nulové – každý třetí mód je potlačen. Opět se můžeme podívat, jak se módy skládají, aby vytvořily trojúhelníkový kmit. Na obrázku 4 je spočítán součet prvních deseti módů pro rozkmit ve třetině.



Obrázek 6: Prvních deset módů a jejich součet pro rozkmit ve třetině

2.4.4. Rozkmitání ve čtvrtině



Obrázek 7: Grafické znázornění pro výchylku struny ve čtvrtině

Nyní rozeberu rozkmitání struny v jedné čtvrtině. Pro $b = \frac{1}{4}L$ platí

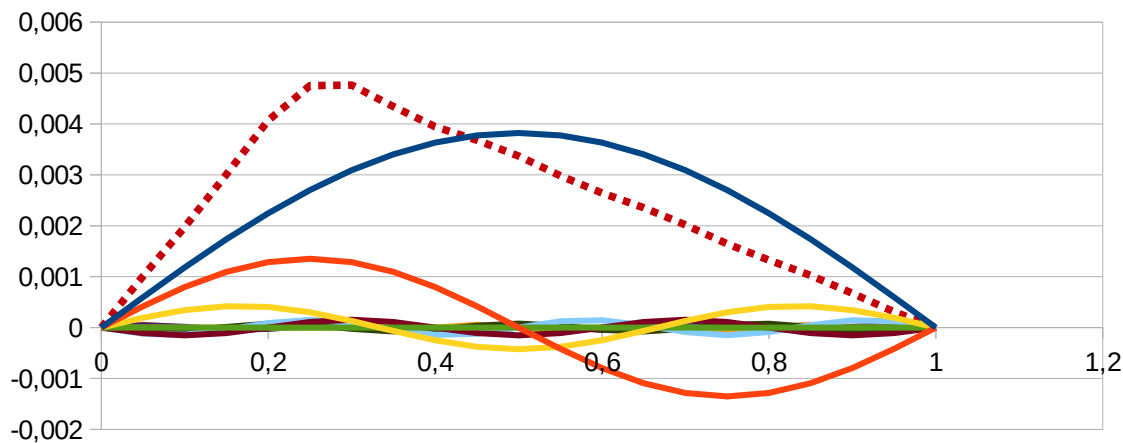
$$A_n = \frac{2 \cdot a \cdot L}{n^2 \cdot \pi^2} \cdot \left\{ \frac{4}{L} \cdot \left[\frac{-n \cdot \pi}{4} \cdot \cos \frac{n \cdot \pi}{4} + \sin \frac{n \cdot \pi}{4} \right] + \frac{4 \cdot (-1)^{n-1}}{3 \cdot L} \cdot \left[\frac{-3 \cdot n \cdot \pi}{4} \cdot \cos \frac{3 \cdot n \cdot \pi}{4} + \sin \frac{3 \cdot n \cdot \pi}{4} \right] \right\} \quad (26)$$

Ze vzorce je vidět, že pro spektrum při rozkmitu ve čtvrtině je důležitá dělitelnost osmi.

Tabulka 3: Konstanty A_n pro rozkmit ve čtvrtině

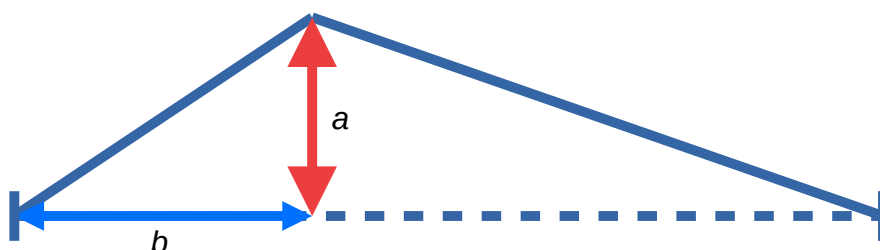
n modulo 8	$\cos \frac{n \cdot \pi}{3}$	$\sin \frac{n \cdot \pi}{3}$	$\cos \frac{2 \cdot n \cdot \pi}{3}$	$\sin \frac{2 \cdot n \cdot \pi}{3}$	A_n
0	1	0	1	0	0
1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{16 \cdot a \cdot \sqrt{2}}{3 \cdot n^2 \cdot \pi^2}$
2	0	1	0	1	$\frac{16 \cdot a}{3 \cdot n^2 \cdot \pi^2}$
3	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{16 \cdot a \cdot \sqrt{2}}{3 \cdot n^2 \cdot \pi^2}$
4	-1	0	-1	0	0
5	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{16 \cdot a \cdot \sqrt{2}}{3 \cdot n^2 \cdot \pi^2}$
6	0	-1	0	1	$\frac{16 \cdot a}{3 \cdot n^2 \cdot \pi^2}$
7	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{16 \cdot a \cdot \sqrt{2}}{3 \cdot n^2 \cdot \pi^2}$

Obdobně jako v předchozích kapitolách je na obrázku 8 je ukázáno prvních deset módů a jejich součet pro rozkmit ve čtvrtině, každý čtvrtý mód je nulový.



Obrázek 8: Prvních deset módů a jejich součet pro rozkmit ve čtvrtině

2.4.5. Zlatý řez



Obrázek 9: Grafické znázornění výchylky struny ve zlatém řezu

Zlatý řez (viz obrázek 10) je definován jako speciální poměr. Vzniká rozdělením úsečky na menší a větší část, kdy poměr menší části ku větší je roven poměru větší části úsečky k úsečce samotné [6]. Je-li délka celé úsečky rovna jedné a délka její větší části je l , pak platí

$$\frac{1-l}{l} = \frac{l}{1} \quad (27)$$

Tedy vyřešíme kvadratickou rovnici:

$$l^2 + l - 1 = 0 \quad (28)$$

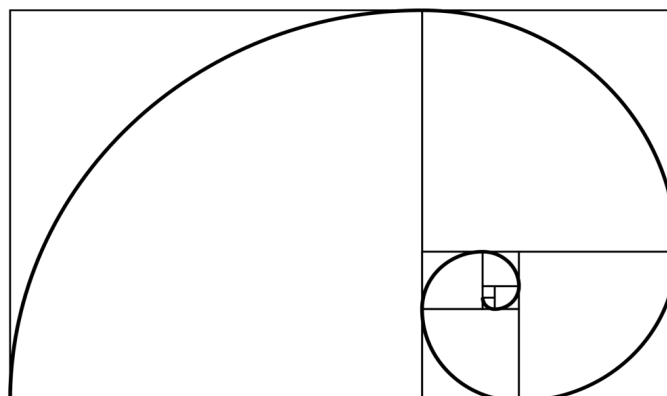
která má dva kořeny:

$$l_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad (29)$$

přičemž pouze jeden z nich je kladný, a ten vyjadřuje převrácenou hodnotu zlatého řezu:

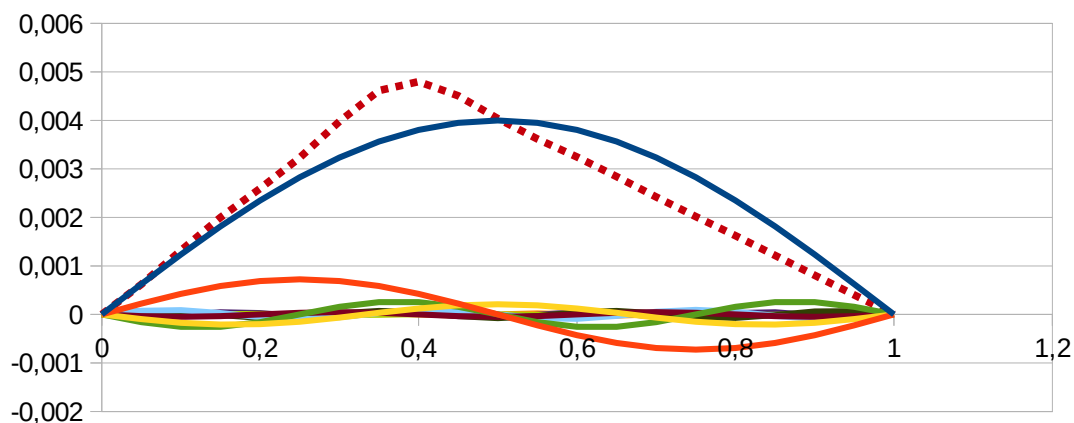
$$z_r = \frac{1}{l} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (30)$$

což numericky vychází zaokrouhleně na 1,618. V jistém smyslu je to nejvíce iracionální číslo, protože je poměrně obtížné je aproximovat posloupností racionálních čísel.



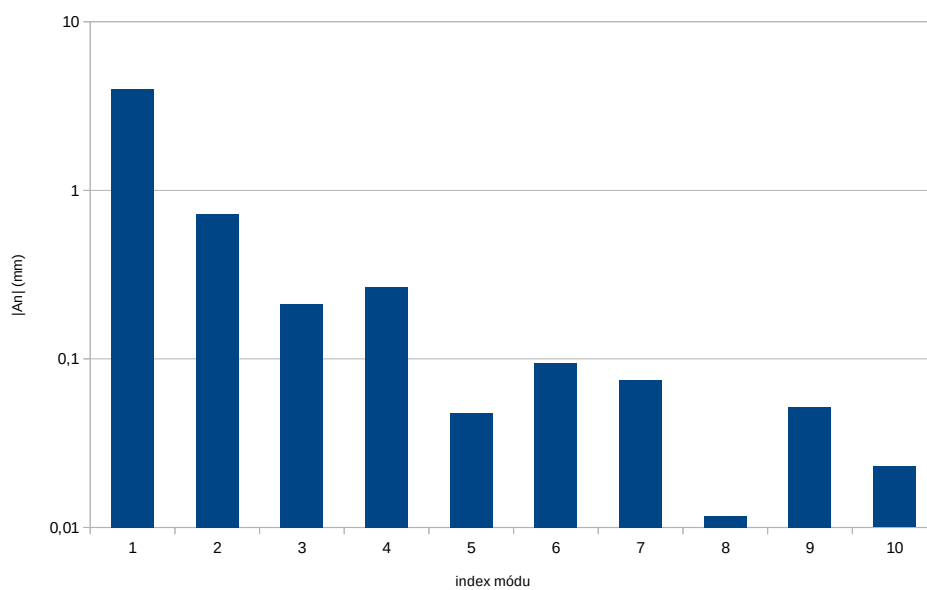
Obrázek 10: Ukázka zlatého řezu na ulitě [7]

Pomocí výsledku v kapitole 2.4.2 jsem spočítala konstanty A_1-A_{10} a znázornila prvních deset kmitů v případě rozkmitu v místě zlatého řezu (obrázek 11).



Obrázek 11: Prvních deset módů a jejich součet pro rozkmit v místě zlatého řezu

Při rozkmitu v místě zlatého řezu k vymizení žádných módů nedochází, výsledky pro prvních deset hodnot A_n jsou ukázány na obrázku 12.



Obrázek 12: Prvních deset koeficientů A_n pro rozkmit v místě zlatého řezu

2.5. Hladina hlasitosti zvuku

V experimentální části měříme hladinu hlasitosti zvuku. Abychom výsledky experimentu mohli porovnat s výpočty, potřebujeme tuto fyzikální veličinu také vypočítat. Hladina hlasitosti zvuku je definována vztahem [8]

$$H = 10 \cdot \log \frac{I_1}{I_0} = 10 \cdot \log \frac{A_1^2}{A_0^2}, \quad (31)$$

kde veličina I je intenzita zvuku, která je pro danou frekvenci přímo úměrná druhé mocnině amplitudy A . I_0 je referenční hodnota (tzv. práh slyšitelnosti).

Relativní hlasitost vyšších harmonických frekvencí nám určuje barvu tónu, proto pro ni platí

$$H_n = 10 \cdot \log \frac{A_n^2}{A_1^2}, \quad (32)$$

kde A_1 je amplituda základní frekvence tónu.

Výpočet amplitud pro vyšší harmonické frekvence v jednotlivých bodech rozkmitu a příslušných hlasitostí podle vzorce (24) byl proveden v tabulkovém procesoru pro strunu délky 1000 mm a počáteční maximální výchylku 5 mm. Hlasitost vyšších harmonických frekvencí byla vypočtena relativně vůči hlasitosti základní frekvence.

Tabulka 4: Vypočtené hodnoty amplitud a relativních hlasitostí

mód	polovina		třetina		čtvrtina		zlatý řez	
n	An (mm)	H [dB]	An (mm)	H [dB]	An (mm)	H [dB]	An (mm)	H [dB]
1	4,053	0,00	3,949	0,00	3,821	0,00	4,000	0,00
2	0	-infinity	0,987	-12,04	1,351	-9,03	0,725	-14,84
3	-0,450	-19,08	0	-infinity	0,425	-19,08	-0,211	-25,55
4	0	-infinity	-0,247	-24,08	0	-infinity	-0,267	-23,51
5	0,162	-27,96	-0,158	-27,96	-0,153	-27,96	-0,048	-38,44
6	0	-infinity	0	-infinity	-0,150	-28,12	0,095	-32,52
7	-0,083	-33,80	0,081	-33,80	-0,078	-33,80	0,075	-34,56
8	0	-infinity	0,062	-36,12	0	-infinity	-0,012	-50,65
9	0,050	-38,17	0	-infinity	0,047	-38,17	-0,052	-37,72
10	0	-infinity	-0,039	-40,00	0,054	-36,99	-0,023	-44,81
11	-0,033	-41,66	-0,033	-41,66	0,032	-41,66	0,021	-45,59
12	0	-infinity	0	-infinity	0	-infinity	0,029	-42,86
13	0,024	-44,56	0,023	-44,56	-0,023	-44,56	0,003	-63,39
14	0	-infinity	0,020	-45,85	-0,028	-42,83	-0,019	-46,26
15	-0,018	-47,04	0	-infinity	-0,017	-47,04	-0,014	-48,93
16	0	-infinity	-0,015	-48,16	0	-infinity	0,006	-56,81
17	0,014	-49,22	-0,014	-49,22	0,013	-49,22	0,015	-48,61
18	0	-infinity	0	-infinity	0,017	-47,20	0,005	-58,01
19	-0,011	-51,15	0,011	-51,15	0,011	-51,15	-0,009	-53,34
20	0	-infinity	0,010	-52,04	0	-infinity	-0,010	-52,30

Z tabulky 4 lze vyčíst, že některé frekvence jsou potlačené. V případě rozkmitu v polovině struny je potlačena každá druhá frekvence, ve třetině je to každá třetí a ve čtvrtině každá čtvrtá. V případě, že by byl bod rozkmitu ve zlatém řezu struny, není potlačena žádná frekvence.

3. PRAKTICKÁ ČÁST

V této kapitole je popsán experiment, který jsem provedla na kytarě.

Strunu kytary jsem vychýlila postupně v několika konkrétních bodech a pomocí mikrofону jsem zaznamenala zvuk. Pomocí programu Audacity jsem zpracovala digitální záznam zvuku a nechala vypočítat jeho frekvenční spektrum.

3.1. Experimentální zařízení

K experimentu jsem využila naladěnou kytarovou strunu A se základní frekvencí 110 Hz. Správné naladění jsem ověřila pomocí kytarové ladičky.

Pro vyšší přesnost experimentu jsem pro vychýlení struny využila hřebík.

Zvuk jsem nahrála pomocí digitálního diktafonu značky Olympus VN-8700PC.

3.2. Vlastní měření

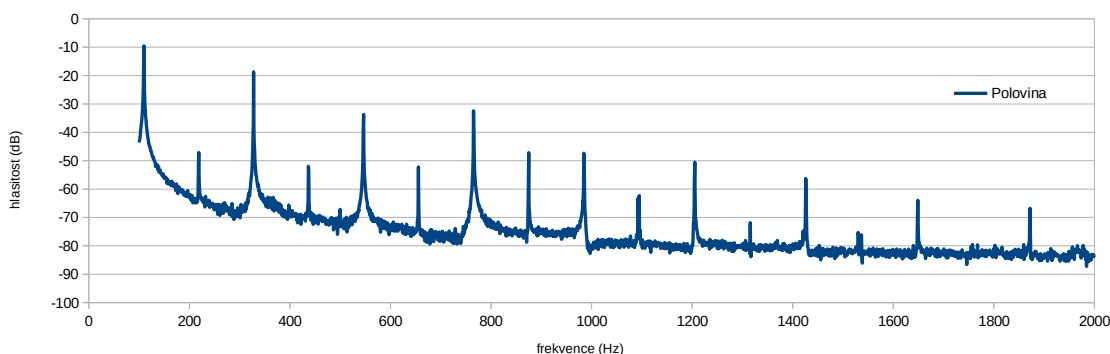
Experiment jsem provedla ve čtyřech různých bodech na struně: v polovině, třetině, čtvrtině a v místě zlatého řezu. V každém bodě jsem zopakovala měření několikrát a následně vybrala nejlepší spektrum, se kterým jsem dále pracovala.

Pracovala jsem se strunou o délce $L=65,0$ cm

3.2.1. Měření v polovině struny

Nejprve jsem provedla měření v polovině struny. Pro toto měření platí

$$b = \frac{1}{2} L \Rightarrow b = 32,5 \text{ cm}$$



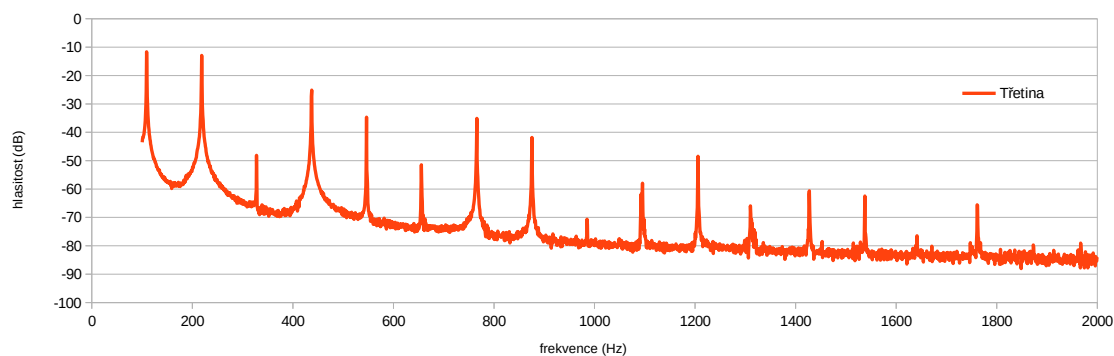
Obrázek 13: Spektrum zobrazující zastoupení vyšších harmonických frekvencí při rozkmitu v polovině

Ze spektra je vidět, že skutečně došlo k potlačení sudých harmonických frekvencí.

3.2.2. Měření ve třetině struny

Pro druhé měření jsem zvolila vychýlení v jedné třetině struny. Platí tedy

$$b = \frac{1}{3} L \Rightarrow b = 21,7 \text{ cm}$$



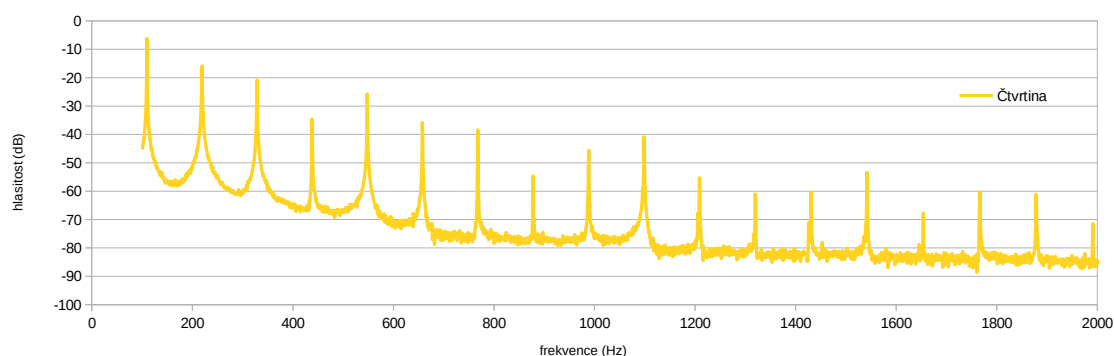
Obrázek 14: Spektrum zobrazující zastoupení vyšších harmonických frekvencí při rozkmitu ve třetině

V případě rozkmitu v jedné třetině dochází k potlačení každé třetí harmonické frekvence.

3.2.3. Měření ve čtvrtině struny

Pro další měření jsem zvolila jednu čtvrtinu. Pro toto místo platí

$$b = \frac{1}{4} L \Rightarrow b = 16,25 \text{ cm}$$



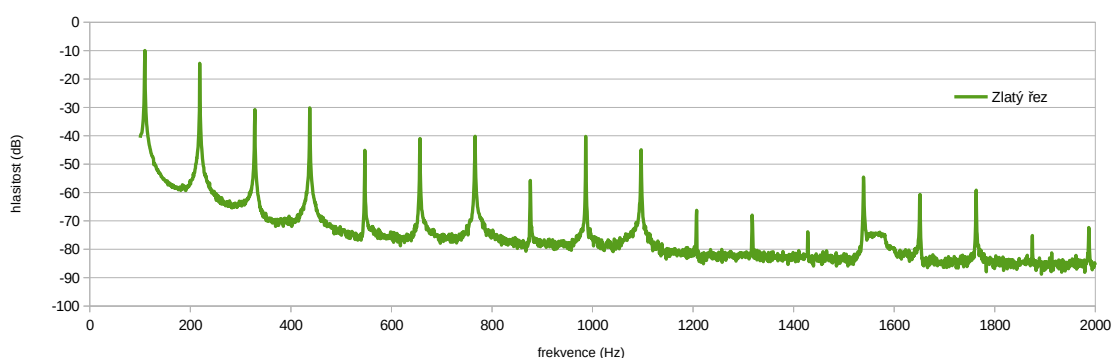
Obrázek 15: Spektrum zobrazující zastoupení vyšších harmonických frekvencí při rozkmitu ve čtvrtině

Z obrázku 15 je možné vypořizovat nižší hlasitost každé čtvrté vyšší harmonické frekvence. Potlačení ale není tak výrazné jako v předcházejících případech.

3.2.4. Měření v místě zlatého řezu

Poslední měření jsem provedla v místě zlatého řezu, pro který platí

$$b = \frac{1}{z_r} L = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} L = \frac{2}{1+\sqrt{5}} L \Rightarrow b = 40,13 \text{ cm}$$

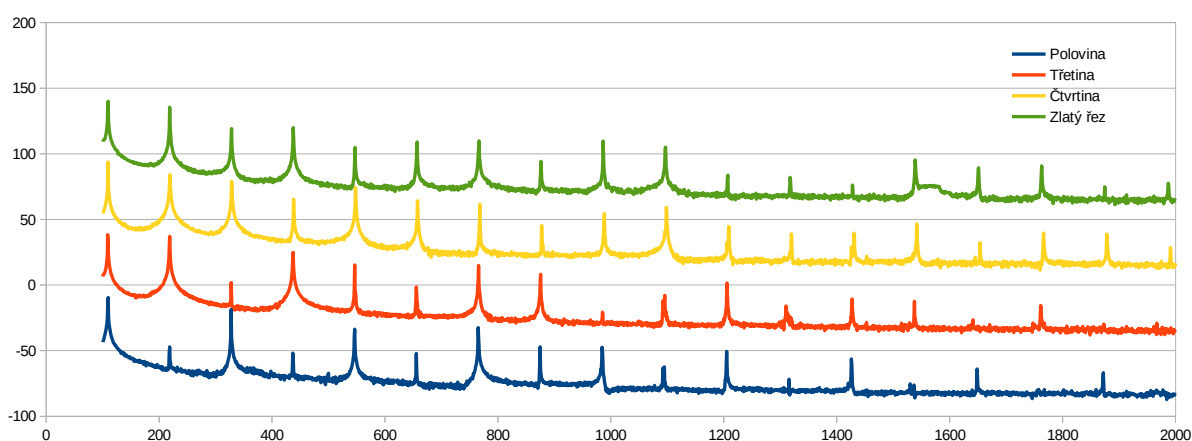


Obrázek 16: Spektrum zobrazující zastoupení vyšších harmonických frekvencí při rozkmitu v místě zlatého řezu

V případě rozkmitu struny v místě zlatého řezu není ve spektru vidět žádný pravidelný pokles vyšších harmonických frekvencí.

3.2.5. Porovnání naměřených spekter

Pro porovnání naměřených spekter jsem všechna čtyři spektra zanesla do jednoho grafu s tím, že pro lepší čitelnost jsou následná spektra posunuta vždy o 50 dB nahoru (obrázek 17). Na obrázku můžeme pozorovat rozdíly v zastoupení vyšších harmonických frekvencí.



Obrázek 17: Naměřená spektra pro různá místa rozkmitu

3.3. Numerické výsledky experimentu

Spektra vytvořená v programu Audacity jsem exportovala a následně vypsala maxima, která jsou blízko násobků nominální frekvence 110 Hz. Hodnoty jsem zapsala do níže vložené tabulky 5.

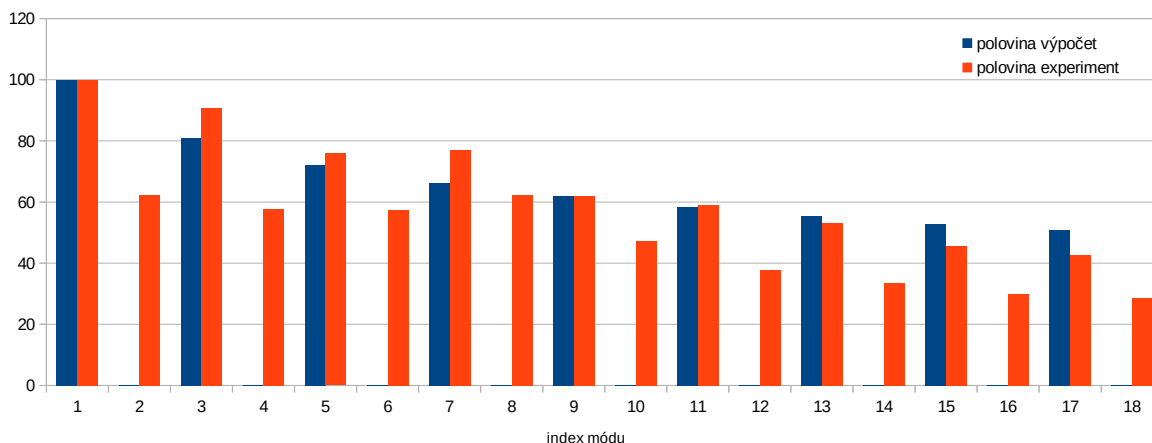
Tabulka 5: Odečtené hodnoty hlasitosti vyšších harmonických frekvencí

mód	polovina	třetina	čtvrtina	zlatý řez
n	H [dB]	H [dB]	H [dB]	H [dB]
1	-9,53	-16,86	-6,24	-9,96
2	-47,13	-12,92	-19,04	-14,48
3	-18,69	-48,11	-20,84	-30,79
4	-51,96	-25,15	-34,57	-30,15
5	-33,66	-34,70	-25,75	-45,10
6	-52,19	-51,47	-35,78	-40,97
7	-32,43	-35,11	-38,45	-40,16
8	-47,15	-41,83	-54,65	-55,72
9	-47,39	-70,65	-45,57	-40,23
10	-62,34	-57,93	-40,82	-44,94
11	-50,54	-48,45	-55,31	-66,25
12	-71,87	-70,76	-61,03	-67,95
13	-56,31	-60,65	-60,52	-73,84
14	-76,14	-62,48	-53,40	-54,56
15	-64,00	-76,49	-67,74	-60,69
16	-79,52	-65,56	-60,39	-59,18
17	-66,79	-79,71	-61,13	-75,14
18	-81,06	-83,19	-84,20	-84,22

4. POROVNÁNÍ MĚŘENÍ S VÝPOČTEM

V této kapitole provedu porovnání naměřených hodnot s výpočtem. Hodnoty hlasitostí vyšších harmonických frekvencí odečtených ze spektru jsem pro přímé porovnání opět vyjádřila relativně k hlasitosti základní frekvence 110 Hz. Pro jednodušší vykreslení jsem k relativním hodnotám hlasitostí připočetla 100 dB.

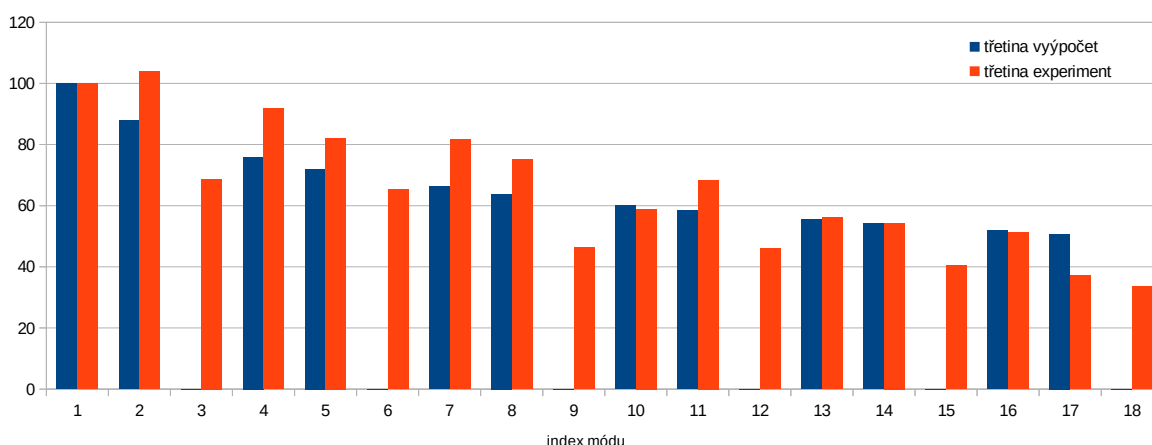
4.1. Rozkmit v polovině



Obrázek 18: Porovnání výpočtu s naměřenými hodnotami při rozkmítu v polovině

Z teorie vyplývá, že by, při rozkmítu v polovině, měla být potlačena každá druhá vyšší harmonická frekvence. K úplnému vymizení těchto frekvencí v experimentu nedošlo, i přesto můžeme pozorovat jejich částečné potlačení.

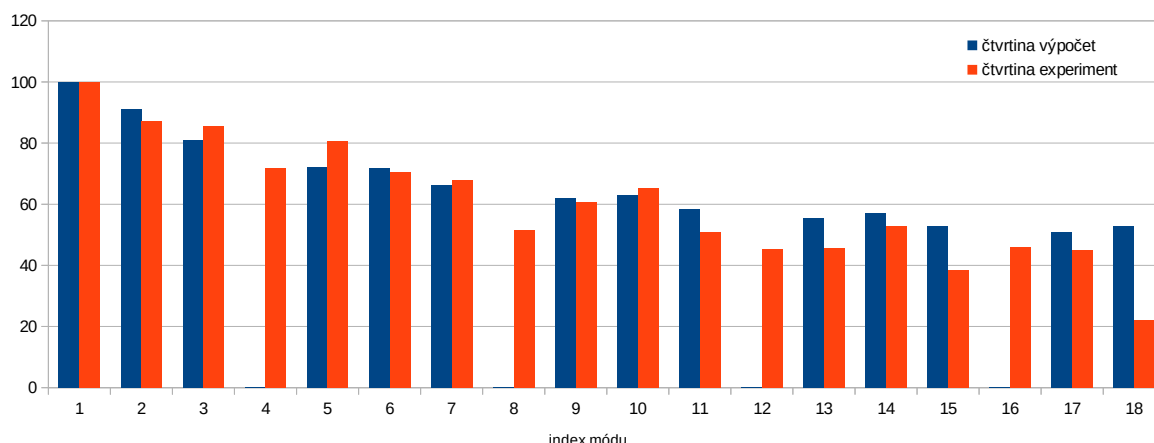
4.2. Rozkmit ve třetině



Obrázek 19: Porovnání výpočtu s naměřenými hodnotami při rozkmítu ve třetině

Pro rozkmit ve třetině struny by měla být potlačena každá třetí vyšší harmonická frekvence. Po vykreslení experimentu můžeme tento fakt v grafu pozorovat. K úplnému potlačení však nedošlo.

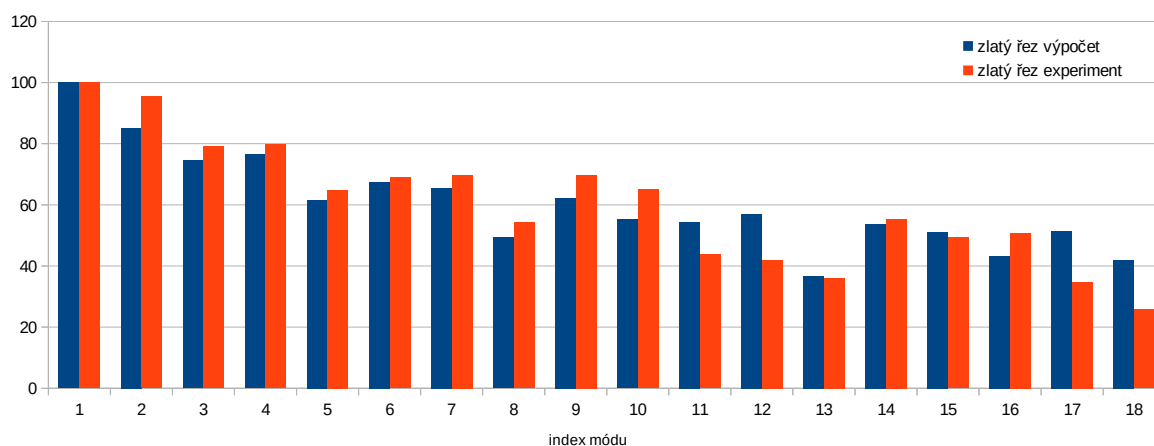
4.3. Rozkmit ve čtvrtině



Obrázek 20: Porovnání výpočtu s naměřenými hodnotami při rozkmitu ve čtvrtině

Rozkmit ve čtvrtině by podle teorie měl mít potlačenou každou čtvrtou vyšší harmonickou frekvenci. K úplnému vymizení těchto frekvencí, stejně jako u předchozích grafů, nedochází. Ale můžeme si také všimnout podobně vysokých vrcholů v ostatních módech.

4.4. Rozkmit ve zlatém řezu



Obrázek 21: Porovnání výpočtu s naměřenými hodnotami při rozkmitu v místě zlatého řezu

V teorii zlatého řezu jsme došli k závěru, že by neměla být úplně potlačená žádná vyšší harmonická frekvence. Tuto teorii se nám experimentálně podařilo potvrdit. Úrovně vyšších harmonických frekvencí jsou si velice podobné. Zastoupení všech vyšších harmonických frekvencí znamená bohatší barvu tónu.

5. ZÁVĚR

Cílem této práce bylo zjistit, zda existuje nějaký vztah mezi bodem rozkmitu na pevné struně a barvou tónu. Výzkum byl proveden jak teoreticky (rozkladem Fourierovy řady), tak prakticky (na akustické kytáře). Z výsledků vyplývá, že barva tónu je závislá na vzdálenosti bodu rozkmitu od pevného konce.

V teoretické části jsem došla k závěru, že by měla být potlačena každá druhá harmonická frekvence v případě rozkmitu v polovině, každá třetí při rozkmitu v třetině a každá čtvrtá při rozkmitu ve čtvrtině. V praktické části mi vyšlo menší potlačení těchto harmonických, přesto tam ale bylo výrazné. Jedna z možností, proč se tak mohlo stát mohlo, je nepřesné rozkmitání v určeném bodě rozkmitu. Ten sice můžeme odměřit pomocí metru, ale dílčí nepřesnosti jsou možné. Při rozkmitu dochází k potlačení těch módů, které mají v bodě rozkmitu uzel, a proto je měření na polohu bodu citlivé. Pro přesnější výsledky by bylo dobré rozkmit provádět pomocí nějakého přístroje. Další možností je konstrukce kytary, která se pouze přibližuje modelu ideální struny s pevnými konci.

Hudba je jeden z mých koníčků už od malička a když jsem zjistila, že se dá spojit s vědou jako je fyzika, bylo jsem nadšená tímto tématem. Bavilo mě poslouchat nahrávky a přemýšlet nad tím, jak moc je člověk schopný barvu tónu vnímat. Naučila jsem se základy rozkladu Fourierovy řady, práce s derivacemi a integrály.

Dalším pokračováním této práce by mohlo být zkoumání rozdílu barvy tónu při hře na klavír a cembalo, kdy oba nástroje jsou strunné klávesové, ale každý má jiný mechanismus rozkmitu struny (kladívko versus trsátko). Bylo by také zajímavé zkoumat hru na cimbál, například proč se na cimbálu hraje na krajích strun a proč jsou nakloněné.

6. POUŽITÁ LITERATURA

- [1] *Standing Waves*. Online. LibreTexts PHYSICS. Dostupné z: https://phys.libretexts.org/Courses/University_of_California_Davis/UCD%3A_Physics_7C_-_General_Physics/8%3A_Waves/8.8%3A_Standing_Waves. [cit. 2025-01-15].
- [2] *Standing Wave*. Online. Britannica. Dostupné z: <https://www.britannica.com/science/standing-wave-physics>. [cit. 2025-01-15].
- [3] *Traveling Waves*. Online. LibreTexts PHYSICS. Dostupné z: [https://phys.libretexts.org/Bookshelves/University_Physics/University_Physics_\(OpenStax\)/Book%3A_University_Physics_I_-_Mechanics_Sound_Oscillations_and_Waves_\(OpenStax\)/16%3A_Waves/16.02%3A_Traveling_Waves](https://phys.libretexts.org/Bookshelves/University_Physics/University_Physics_(OpenStax)/Book%3A_University_Physics_I_-_Mechanics_Sound_Oscillations_and_Waves_(OpenStax)/16%3A_Waves/16.02%3A_Traveling_Waves). [cit. 2025-01-15].
- [4] THE UNIVERSITY OF TENNESSEE, KNOXVILLE. *Traveling Waves*. Online. Department of Physics and Astronomy. Dostupné z: http://labman.phys.utk.edu/phys221core/modules/m11/traveling_waves.html. [cit. 2025-01-15].
- [5] BAJER, Jiří. *Mechanika 3. 2., rozš. a dopl. vyd.* Olomouc: Vladimír Chlup, 2012. ISBN 978-80-903958-5-5.
- [6] *Zlatý řez*. Online. Wikipedie. 2024. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Zlat%C3%BD_%C5%99ez. [cit. 2025-01-15].
- [7] *Zlatý řez - nákres*. Online. In: Plotbase. 2022. Dostupné z: <https://www.plotbase.cz/uploads/ckeditor/zlaty-rez-nakres.jpg>. [cit. 2025-01-15].
- [8] HALLIDAY, David; RESNICK, Robert a WALKER, Jearl, DUB, Petr (ed.). *Fyzika. Přerac. vyd. Překlady vysokoškolských učebnic*. Brno: VUTIUM, 2013. ISBN 978-80-214-4123-1.

7. SEZNAM TABULEK A OBRÁZKŮ

Seznam tabulek

Tabulka 1: Konstanty A_n pro rozkmit v polovině.....	11
Tabulka 2: Konstanty A_n pro rozkmit ve třetině.....	13
Tabulka 3: Konstanty A_n pro rozkmit ve čtvrtině.....	15
Tabulka 4: Vypočtené hodnoty amplitud a relativních hlasitostí.....	18
Tabulka 5: Odečtené hodnoty hlasitostí vyšších harmonických frekvencí.....	22

Seznam obrázků

Obrázek 1: Náčrt trojúhelníkového kmitu.....	9
Obrázek 2: Náčrt vychýlení struny v polovině tak , aby vznikl rovnoramenný trojúhelník.....	10
Obrázek 3: Prvních deset módů a jejich součet pro rozkmit v polovině.....	12
Obrázek 4: Obecné schéma pro trojúhelníkový kmit.....	12
Obrázek 5: Náčrt vychýlení ve třetině struny.....	13
Obrázek 6: Prvních deset módů a jejich součet pro rozkmit ve třetině.....	14
Obrázek 7: Grafické znázornění pro výchylku struny ve čtvrtině.....	14
Obrázek 8: Prvních deset módů a jejich součet pro rozkmit ve čtvrtině.....	15
Obrázek 9: Grafické znázornění výchylky struny ve zlatém řezu.....	16
Obrázek 10: Ukázka zlatého řezu na uliti [7].....	16
Obrázek 11: Prvních deset módů a jejich součet pro rozkmit v místě zlatého řezu.....	17
Obrázek 12: Prvních deset koeficientů A_n pro rozkmit v místě zlatého řezu.....	17
Obrázek 13: Spektrum zobrazující zastoupení vyšších harmonických frekvencí při rozkmitu v polovině.....	19
Obrázek 14: Spektrum zobrazující zastoupení vyšších harmonických frekvencí při rozkmitu ve třetině.....	20
Obrázek 15: Spektrum zobrazující zastoupení vyšších harmonických frekvencí při rozkmitu ve čtvrtině.....	20
Obrázek 16: Spektrum zobrazující zastoupení vyšších harmonických frekvencí při rozkmitu v místě zlatého řezu.....	21
Obrázek 17: Naměřená spektra pro různá místa rozkmitu.....	21
Obrázek 18: Porovnání výpočtu s naměřenými hodnotami při rozkmitu v polovině.....	23
Obrázek 19: Porovnání výpočtu s naměřenými hodnotami při rozkmitu ve třetině.....	23
Obrázek 20: Porovnání výpočtu s naměřenými hodnotami při rozkmitu ve čtvrtině.....	24
Obrázek 21: Porovnání výpočtu s naměřenými hodnotami při rozkmitu v místě zlatého řezu.....	24